

## **Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания МАТЕМАТИКИ на основе выявленных типичных затруднений и ошибок ЕГЭ на базовом уровне**

*Антонова Е.И., зав. кафедрой  
естественно-математического образования ГАОУДПО ВО ВПО*

### ○ *Учителям*

Результаты экзамена по математике на базовом уровне позволили выявить ряд проблем, которые необходимо учитывать при обучении математике и подготовке обучающихся к государственной итоговой аттестации в формате ЕГЭ.

Важным условием успешной подготовки к экзамену является тщательность в отслеживании результатов учеников по всем темам и в своевременной коррекции уровня усвоения учебного материала.

Низкий процент выполнения геометрических заданий по планиметрии и стереометрии свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии в основной школе.

Недостаточное формирование вычислительных навыков учащихся при выполнении заданий 2, 3, 4 и 15 (практико-ориентированные задачи), а также некорректное использование данных задачи при составлении математической модели в задании 20.

На основании вышеизложенного, рекомендуем педагогам проанализировать результаты государственной итоговой аттестации по математике на заседаниях городских (районных) методических объединений учителей математики; планировать работу на 2024-2025 учебный год с учетом:

- изучения нормативных документов Министерства Просвещения РФ, методических писем и методических рекомендаций ФИПИ <http://www.fipi.ru/>, где содержатся нормативные требования к проведению ЕГЭ, характеристика контрольных измерительных материалов по математике, рекомендации по использованию и интерпретации результатов выполнения экзаменационных работ и т. п. Ознакомление обучающихся с демоверсиями ЕГЭ 2025 г. (акцент на повторение /изучение материала, освоение навыков);
- использования ресурса «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации <http://www.fipi.ru/>;
- ознакомление с видео-консультациями и с ресурсом «Навигатор подготовки к ОГЭ, ЕГЭ» <https://fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-ege>;
- использование банка заданий по формированию математической грамотности ИСРО РАО <http://skiv.instrao.ru/bank-zadaniy/matematiceskaya-gramotnost/>;
- выявления проблемных тем теоретического материала по математике за курс основной и старшей школы: числа и выражения, уравнение и неравенства, планиметрия и стереометрия, функция, текстовые задачи, вероятность и статистика. Организация индивидуальных и групповых занятий по восполнению пробелов в знаниях отдельных теоретических вопросов курса математики;
- на занятиях спецкурсов, факультативов продолжить отработку навыков практического применения теории по содержательным блокам курса математики, например, «Числа и вычисления», «Уравнения и неравенства», «Функции и графики», «Практико-ориентированные задачи», «Текстовые задачи», «Геометрические фигуры и их свойства»;

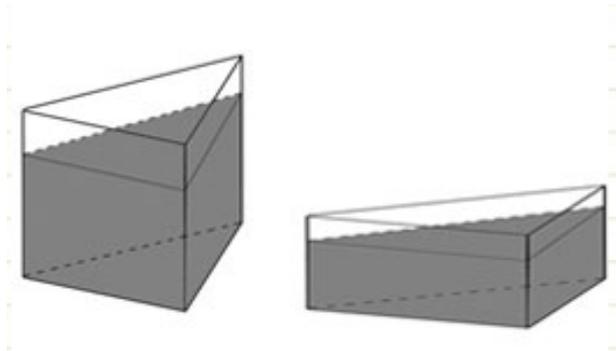
- на уроках повторения пройденного материала уделить особое внимание вопросам и заданиям, вызвавшим затруднения у школьников: дробно-рациональные неравенства, показательные, логарифмические уравнения, текстовые задачи на проценты, нахождение неизвестной величины в геометрических задачах;
- закрепления навыков смыслового чтения и анализа текста заданий (задания типа 1, 2, 6, 7, 8, 19, 21), т.к. у обучающихся недостаточно сформированы как читательская грамотность, так и умения использовать приобретённые знания в практической деятельности и повседневной жизни. В каждой теме при изучении математики в старшей школе в соответствии с кодификатором содержания выполнять задания, построенные на реальных жизненных ситуациях. Делать акцент на обсуждение: обсуждение ситуации, выявление математических аспектов, всех данных, переформулирование и моделирование объектов, перевод на язык математики, обсуждение ограничений, допущений, различные способы решения, обсуждение их рациональности; обсуждение результатов: оценка и интерпретация, соотнесение с ситуацией;
- регулярное включение в ход урока заданий на «изменение и зависимости», «пространство и форма», «неопределенность», «количественные рассуждения». Предъявление обучающимся и выполнение ими контекстных заданий, разработанных на основе проблемных ситуаций, является важным видом познавательной и практической деятельности, в ходе которой развивается функциональная грамотность, в том числе и математическая. Эта деятельность требует, во-первых, применения осваиваемых школьниками знаний, умений и опыта, а во-вторых, переноса осваиваемых в рамках учебного предмета «Математика» знаний и умений на более широкую познавательную и практическую область, расширяющуюся по мере обучения школьников;
- усиления внимания к геометрическим задачам на нахождение неизвестной величины и на доказательство; необходимо обратить самое большое внимание на изучение геометрии – непосредственно с 7 класса, когда начинается систематическое изучение этого предмета. Подготовку выпускников следует начинать не с рассмотрения примеров решения геометрических задач вариантов ЕГЭ, а с изучения свойств геометрических фигур и их элементов. Задачи необходимо решать по темам, например, «Треугольник и его элементы», «Окружность и круг», «Пирамида: понятие, свойства, формулы» и т.д. Таким образом, следует рекомендовать при подготовке к экзамену уделять особое внимание формированию и развитию умений выполнять действия с геометрическими фигурами, предлагать задания с разными числовыми данными по одному рисунку, предлагать задания, где необходимо распознавать различные элементы фигуры, указывать свойства и/или вычислить их числовые характеристики, уделять больше внимания развитию умения верно пользоваться геометрическим чертежом, добиваться достаточного уровня владения теоретическим материалом;
- усиления работы по повышению уровня вычислительных навыков учащихся (например, с помощью устной работы на уроках: использование приёмов быстрых устных вычислений, применение арифметических законов действий при работе с числами, свойства степеней, корней и др.), что позволит им успешно выполнить задания, избежав ошибок, применяя рациональные методы вычислений;
- отработки у обучающихся быстрого и правильного выполнения заданий с кратким ответом; постоянно контролировать умения, необходимые для выполнения заданий базового уровня. Формирование не только функциональной математической грамотности, но и читательской грамотности при работе с текстом как основной составляющей функциональной грамотности обучающихся: работа с рисунками, схемами, графиками, текстом, применении знаний на практике. Уделять внимание обучению работы с вопросами, вычленению ключевых теорий, на базе которых строятся ответы;

- использование возможности сетевого взаимодействия с обучающимися, организация изучения тем и итоговое повторение на основе интерактивных уроков, применяя образовательные платформы (например, <https://эдо.образование33.рф> и др.).

**Остановимся на заданиях, в которых выявлены сложности при выполнении:**

**Задание №11** - стереометрическая задача проверяла умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Менее половины участников экзамена (45%) верно ответила на вопрос задачи. В сравнение с предыдущими годами результат выполнения такого вида заданий оказался чуть ниже. Из-за неразвитости пространственных представлений и незнания формул объемов тел значительное число участников экзамена не учли, что площадь основания цилиндра не изменилась, а высота увеличилась в 1,6 раза. Для выполнения стереометрических задач требуется не формальное, а развитое наглядное представление об отношениях объемов тел. Такой тип заданий на объем тела требует отработки как применения формулы объемов, так и представление об отношении объемов. Рассмотрим примеры:

**Пример 1.** *В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.*



Алгоритм рассуждений:

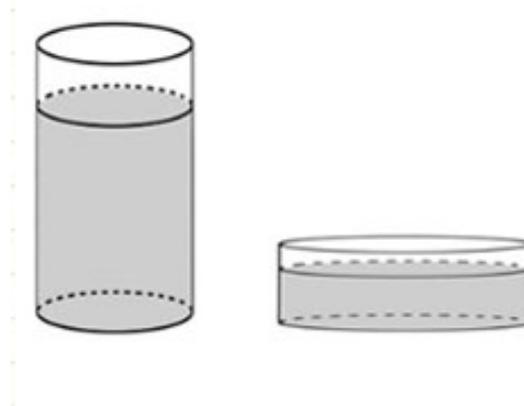
1) Объёмы призм одинаковы.

2) Определим, во сколько раз отличаются площади оснований. Основания – правильные треугольники. Если воспользоваться одной из

формул площади треугольника  $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$ , то становится очевидно, что при увеличении стороны в 2 раза площадь увеличится в 4 раза.

3) При условии равенства объёмов высота первой призмы в 4 раза больше высоты второй, т.е. равна  $8:4 = 2$ . Ответ: 2.

**Пример 2.** *В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 24 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.*



Алгоритм рассуждений:

1) Сравним высоты двух цилиндров с одинаковым объёмом.

Площадь основания – круга – прямо пропорционально зависит от квадрата радиуса. Если диаметр увеличивается в 2 раза, то и радиус увеличивается в 2 раза, а площадь – в 4 раза соответственно.

2) Вывод: при одинаковых объёмах цилиндров и увеличение радиуса в 2 раза (и площади основания в 4 раза соответственно) высота уменьшается в 4 раза –  $24 : 4 = 6$ . Ответ: 6.

**Задание №20** (текстовая задача на движение на определение средней скорости) проверяло умение строить и исследовать простейшие математические модели. Типичные ошибки: в анализе условий данной задачи, неверной трактовки понятия средняя скорость, неумение построения и исследования математической модели по тексту задачи, интерпретации и оценки правдоподобности ответа, вычислительные ошибки.

Организация работы над понятием средней скорости можно начать при изучении темы «Описательная статистика» (7 класс) в курсе «Вероятность и статистика». При описании наборов числовых данных используют разные характеристики. Одной из них является среднее арифметическое. Приведем пример использования среднего арифметического в конкретной ситуации: *Помоги семье Ивановых определить средний расход бензина на основании следующих данных: «Семья Ивановых любит путешествовать на личном автомобиле по просторам России. Вот и в это лето глава семейства, как обычно, заправил полный бензобак, вмещающий 60 литров, и семья отправилась в дорогу. В пути путешественникам понадобилась дополнительная заправка практически пустого бака. Добравшись до места семейного отдыха, папа Иванов решил подсчитать, насколько экономно он управлял автомобилем. Оказалось, что первые 60 литров были использованы из расчета 6 л на 100 км, а остальные 60 л – из расчета 10 л на 100 км. Каким же был средний расход топлива на протяжении всего пути?»*

Вопрос к обучающимся: Как вы считаете, можно ли в этой ситуации использовать среднее арифметическое расхода бензина на 100 км для двух разных участков трассы? Аргументируйте свой ответ. Чему равно среднее арифметическое 6 и 10?  $(6+10)/2=8$ .

Выдвижение гипотезы: Для определения среднего расхода топлива на протяжении всей трассы целесообразно использовать среднее арифметическое двух расходов на 100 км. Подтверждение/опровержение гипотезы - предложить обучающимся заполнить таблицу:

Расход топлива на 100 км, л	Пройденное расстояние, км	Длина пути, км
6	$60 : 6 \cdot 100 = 1000$	1600
10	$60 : 10 \cdot 100 = 600$	
8 (среднее арифметическое)	$(60 + 60) : 8 \cdot 100 = 1500$	1500

Обсудите результат вычислений:

- Можно ли в данной задаче использовать среднее арифметическое?
- Верна ли выдвинутая гипотеза?
- Можно ли все-таки решить задачу по известным данным?
- Да, зная длину пути и количество литров израсходованного бензина:  $120 : 1600 \cdot 100 = 7,5$  ( л ) на 100 км. Проверка:  $120 : 7,5 \cdot 100 = 1600$ .

Предложите обучающимся решить эту задачу в общем виде, принимая за  $a$  и  $b$  расход топлива на 100 км на каждом из участков.  
На этапе мотивации можно предложить решить другие задачи:

Пример	Среднее арифметическое (неверное решение)	Верное решение								
Василий Петрович отправился по делам из своей отдаленной деревни в райцентр. Первые 5 км Василий Петрович шел пешком через поле со скоростью 5 км/ч, а затем еще 5 км проехал на автобусе со скоростью 35 км/ч. Какова средняя скорость Василия Петровича на всем пути?	20 км/ч	8,75 км/ч								
Школьница Катя, готовясь сдавать норматив ГТО по бегу, ежедневно пробегает на стадионе ровно 10 кругов с GPS трекером для бега. Устройство показывает среднюю скорость Тани по итогам пробежки. Результаты измерений за 3 дня занесены в таблицу. <table border="1" data-bbox="226 1305 1167 1385"> <tr> <td>Дата</td> <td>26 ноября</td> <td>27 ноября</td> <td>28 ноября</td> </tr> <tr> <td>Скорость, км/ч</td> <td>15</td> <td>10</td> <td>14</td> </tr> </table> <p>Найдите среднюю скорость Тани за эти 3 дня тренировок.</p>	Дата	26 ноября	27 ноября	28 ноября	Скорость, км/ч	15	10	14	13 км/ч	12,6 км/ч
Дата	26 ноября	27 ноября	28 ноября							
Скорость, км/ч	15	10	14							

Далее работа с формулой: основная формула для решения любой задачи на вычисление средней скорости:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S_{\text{общ.}}}{t_{\text{общ.}}}$$

Рассмотрим примеры задач, аналогичных ЕГЭ базовый уровень (тип №20):

а) Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 84 км/ч, а вторую половину времени – со скоростью 56 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

$$V_{\text{ср}} = \frac{84t + 56t}{2t} = \frac{140t}{2t} = 70 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$$

Ответ: 70.

б) Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 56 км/ч, а вторую – со скоростью 84 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

$$V_{\text{ср}} = \frac{S + S}{\frac{S}{56} + \frac{S}{84}} = \frac{2S}{\frac{3S + 2S}{168}} = \frac{2S \cdot 168}{5S} = 67,2 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$$

Ответ: 67,2.

в) Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 55 км/ч, следующий час – со скоростью 70 км/ч, а затем три часа – со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

$$V_{\text{ср}} = \frac{55 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 90 \cdot 3}{2 + 1 + 3} = \frac{450}{6} = 75 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$$

Ответ: 75.

- *ИПК / ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей*

На основании выявления проблемных тем по математике за курс основной и старшей школы, рекомендуем ИРО, реализующего программы профессионального развития учителей, включить в курсовую подготовку учителя:

- лекционные занятия по методике изучения таких тем, как числа и выражения, уравнение и неравенства, планиметрия и стереометрия, функция, вероятность и статистика;
- практические занятия по решению неравенств (используя различные методы решения, особенно уделять внимание методу интервалов); различных видов уравнений; текстовых задач (составление модели по условию задачи, выполнение математических действий, интерпретация и оценивание полученного результата); геометрических задач (на вычисление, доказательство, особое внимание уделять работе с рисунком); задачи на нахождение вероятности;
- тренинги для молодых учителей, используя ресурс «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика», созданного авторским коллективом ФИПИ с целью подготовки учащихся к итоговой аттестации <http://www.fipi.ru/>.

На образовательном портале Учись 33 <https://uchis33.ru/>, обладающий широкими возможностями онлайн-обучения, в течение года проводить консультации для педагогов и обучающихся по подготовке к ЕГЭ по математике.

В рамках реализации проекта «Академические субботы» провести ряд практических занятий по выявленным сложным заданиям, типа:

- №11 (стереометрическая задача, на нахождение объема тела, погруженного в жидкость);
- №18(задание на соотнесение объектов);
- № 19 (задание на теорию чисел);
- № 20 (текстовая задача на движение).

### **Рекомендации по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки**

- *Учителям*

Отбор учебного материала для повторения и закрепления изученного учебного материала необходимо осуществлять с учетом уровня подготовки обучающихся, уделяя наибольшее внимание традиционно сложным для усвоения темам. При этом целесообразно применять дифференцированный подход, при котором следует разделить обучающихся на группы:

- мотивированным обучающимся, полноценно усвоившим учебный материал, предлагать дополнительные вопросы, расширяющие содержание ранее изученного материала, тренировочные варианты для выполнения, проводить консультации по возникающим вопросам;
- обучающимся, допускающим индивидуальные ошибки при выполнении заданий КИМ, работать над повторением и закреплением теории тем, отработкой групп заданий из Открытого банка ФИПИ. Методические рекомендации для обучающихся по организации индивидуальной подготовки к ЕГЭ по учебному предмету, представленных на официальном сайте ФИПИ <http://www.fipi.ru/>;

- обучающимся с низким уровнем мотивации, испытывавшим затруднения при усвоении ранее изученных тем, предлагать задания на повторение и закрепление ранее изученного материала, отработать задания до автоматизма из ресурса «Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика» (необходимо определить количество и тип заданий, выполнение которых обеспечит преодоление минимального порога).

По организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки необходимо сделать акцент на индивидуальные особенности учащихся и включить в методическую работу поэтапное дифференцированное обучение:

- диагностический этап: первичная диагностика, которая позволит определить имеющийся уровень сформированности знаний, умений, навыков по предмету, а также сформированность метапредметных УУД обучающихся;

- содержательно-методический: выстраивание индивидуальной траектории по подготовке к ГИА, исходя из уровня подготовки обучающихся. Разработка теоретических и практических занятий, направленных на совершенствование и повышение уровня; разработка самооценочных диагностических инструментов, которые позволяют учащимся самостоятельно выстраивать свой образовательный маршрут;

- рефлексивный: обеспечение промежуточного контроля уровня готовности учащихся к сдаче экзамена по математике и корректировка индивидуального образовательного маршрута.

Одним из условий, влияющим на успешную подготовку к ЕГЭ по математике, является реализация индивидуального подхода в работе с обучающимся, планирующим сдавать экзамен на базовом уровне. Для этого может быть использован план-график, который отражает порядок прохождения тем и результаты усвоения изученного материала, в том числе и выполнения заданий. Важнейшим фактором, определяющим успешную сдачу экзамена, является также формирование метапредметных результатов обучения, а также формирования умения мыслить нешаблонно при выполнении заданий. Для реализации индивидуального подхода возможно применение и цифровых образовательных технологий.

○ *Администрациям образовательных организаций*

- обеспечение организации подготовки к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ по математике в течение двух лет (10 — 11 класс) с учетом дифференцированного подхода, которая включает в себя формирование элективных, факультативных курсов по повторению основных разделов математики (числа и вычисления, уравнения и неравенства, функции, геометрия, вероятность и статистика); проведение индивидуальных консультаций и диагностических и тренировочных работ в течение года;

- включение в план внутришкольного контроля подготовку к ЕГЭ по математике учащихся разного уровня, посещение уроков с целью проверки реализации системно-деятельностного подхода, формирования функциональной грамотности, включение в разные этапы урока элементов подготовки к ЕГЭ; осуществление дифференцированного подхода к организации подготовки к ЕГЭ;

- регулярное информирование родителей учащихся об успехах и проблемах обучающихся при подготовке к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ: организация и проведение родительских собраний с целью информирования законных представителей школьников о важности и процедуре проведения государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ, проведение анкетирования для обучающихся по выбору сдачи математики на базовом или профильном уровне.

○ *ИПК / ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей*

На уровне ИРО школы выстроить дифференцированную модель повышения квалификации педагогов по подготовке обучающихся к ЕГЭ по математике, в рамках которой будет сконструирован диагностический, содержательный и рефлексивно-оценочный этапы. Дифференциация может проведена по категориям учителей: молодые специалисты, учителя со сложившейся системой работы и учителя, обучающиеся которых показывают высокие результаты на государственной аттестации. Выявление дефицитов в профессиональной деятельности учителя и выстраивание индивидуального маршрута в повышение квалификации данного педагога.

**Рекомендации по темам для обсуждения / обмена опытом на методических объединениях учителей-предметников для включения в региональную дорожную карту по развитию региональной системы образования**

- Результаты ЕГЭ по математике на базовом уровне в 2024 году и анализ типичных ошибок выполнения заданий с кратким ответом.
- Методические особенности выполнения выявленных сложных заданий, типа: №11 (стереометрическая задача, на нахождения объема тела, погруженного в жидкость); №18(задание на соотнесение объектов); № 19 (задание на теорию чисел); № 20 (текстовая задача на движение).
- ЕГЭ по математике в 2025 году и критерии оценивания заданий.
- Методы и приемы решения математических задач по содержательным линиям курса математики: числа и выражения, уравнения и неравенства, функция и графики, вероятность и статистика.
- Методы и приемы решения геометрических задач: планиметрических и стереометрических.
- Методические особенности решения текстовых задач.
- Использование ЦОС в образовательной практике учителей математики.
- Формирование функциональной грамотности школьников, в том числе читательской и математической в условиях реализации ФГОС и ФОП.

**Рекомендации по возможным направлениям повышения квалификации работников образования для включения в региональную дорожную карту по развитию региональной системы образования**

Возможные направления повышения квалификации учителей математики (очная, очно-заочная и дистанционные формы обучения):

1. Практикум по решению геометрических задач (планиметрия).
2. Практикум по решению геометрических задач (стереометрия).
3. Методические особенности изучения вероятности и статистики в основной и старшей школе.
4. Функциональная линия и особенности выполнения заданий ЕГЭ по математике
5. Линия уравнений и неравенств и особенности ее изучения.
6. Алгебраические выражения и особенности выполнения заданий ЕГЭ по математике
7. Начала математического анализа в старшей школе (практикум по использованию и применению производной)
8. Методические особенности решения текстовых задач.
- 9.Формирование математической грамотности школьников в условиях реализации обновленных ФГОС и ФОП.