ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

ФГОС СОО: формирование требуемых образовательных результатов с первых уроков алгебры и начал математического анализа

10.05.2023, Владимирская область

Мардахаева Елена Львовна, канд. пед. наук, доцент, Лауреат Премии Грант Москвы в сфере образования, автор УМК «Лаборатория А.Г.Мордковича»

ЕДИНОЕ СОДЕРЖАНИЕ
ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ОДОБРЕНА РЕШЕНИЕМ ФЕДЕРАЛЬНОГО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО
ОБЪЕДИНЕНИЯ ПО ОБЩЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ,
протокол 3/21 от 27.09.2021 г.

ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

(для 5–9 классов образовательных организаций)

МОСКВА
2021

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ
РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ОДОБРЕНА РЕШЕНИЕМ ФЕДЕРАЛЬНОГО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО
ОБЪЕДИНЕНИЯ ПО ОБЩЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ,
протокол 2/22 от 29.04.2022 г.

ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

(для 7–9 классов образовательных организаций)

МОСКВА
2022

ЕДИНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ОДОБРЕНА РЕШЕНИЕМ ФЕДЕРАЛЬНОГО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ ПО ОБЩЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ,
протокол 7/22 от 29.09.2022 г.

ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

(для 10—11 классов образовательных организаций)

МОСКВА
2022

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ОДОБРЕНА РЕШЕНИЕМ ФЕДЕРАЛЬНОГО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ ПО ОБЩЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ,
протокол 7/22 от 29.09.2022 г.

ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

(для 10—11 классов образовательных организаций)

МОСКВА
2022

Объём часов, предусмотренный программами на изучение математики в основной и средней школе

Базовый уровень	Углублённый уровень
Настоящей программой предусматривается выделение в учебном плане на изучение математики в 5-6 классах **5 учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **340 учебных часов**	
в 7-9 классах **6 (3+2+1) учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **612 (306+204+102) учебных часов**.	в 7-9 классах **8 (4+3+1)учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **816 (408+306+102) учебных часов**.
В учебном плане на изучение математики в 10-11 классах отводится **5 учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **350 (175+105+70) учебных часов.** (из них в 10 кл. 2+2+1, в 11 кл. 3+1+1)	В учебном плане на изучение математики в 10-11 классах на отводится **8 (4+3+1) учебных часов в неделю** в течение каждого года обучения, всего **560 (280+210+70) учебных часов**.
Тематическое планирование учебных курсов и рекомендуемое распределение учебного времени для изучения отдельных тем, предложенные в настоящей программе, надо рассматривать как **примерные ориентиры** в помощь составителю авторской рабочей программы, и прежде всего учителю. **Автор** рабочей программы вправе **увеличить или уменьшить предложенное число** учебных часов на тему, чтобы углубиться в тематику, заинтересовавшую обучающихся, или направить усилия на преодоление затруднений. Допустимо также локальное **перераспределение и перестановка** элементов содержания курса внутри данного класса.	

Алгебра, 7-9 классы

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В.,
Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

Математика – это язык, на котором говорят все точные науки.
Н.И.Лобачевский

Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Класс	Функция	Реальные и физические процессы
7 класс	Линейная функция.Функция $y = x^2$. Кусочная функция.	Равномерные процессы.
8 класс	Квадратичная функция. Функции $y = \|x\|$, $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.	Равноускоренные процессы.
9 класс	Функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Обобщение изученного в основной школе, формализация некоторых определений и понятий.	
10 класс	Тригонометрические функции. Степенные, показательные и логарифмические функции.	Периодические процессы, гармонические колебания. Процессы органического роста.
11 класс	Элементы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления; обобщение изученного.	Мгновенная скорость, площадь и объём, оптимальные значения некоторых величин.

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Оглавление

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Оглавление

ЛАБОРАТОРИЯ А. Г. Мордковича

Оглавление

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Оглавление

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

	Повторение.	**15**
	Степень с натуральным, целым и действительным показателями.	1
	Корень степени *n* > 1 и его свойства. Иррациональные уравнения.	1
	Тождественные преобразования выражений. Выражения, содержащие корни *n*–й степени. Формулы.	1
	Преобразование тригонометрических выражений.	1
	Тригонометрические функции.	1
	Тригонометрические уравнения.	1
	Логарифм и его свойства. Логарифмические выражения.	1
	Логарифмические уравнения.	1
	Логарифмические неравенства.	1
	Показательные уравнения.	1
	Показательные неравенства.	1
	Функции и их свойства. Графики функций. Касательная.	1
	Применение производной к исследованию функций.	1
	Использование вероятностей и статистики при решении прикладных задач.	1
	Применение метода математического моделирования при решении различных задач.	1
		102

Три кита тригонометрии

Числовая окружность – система дидактических заданий

1. Длина дуги единичной окружности.

2. От «хорошего» числа к точке.

3. От «плохого» числа к точке.

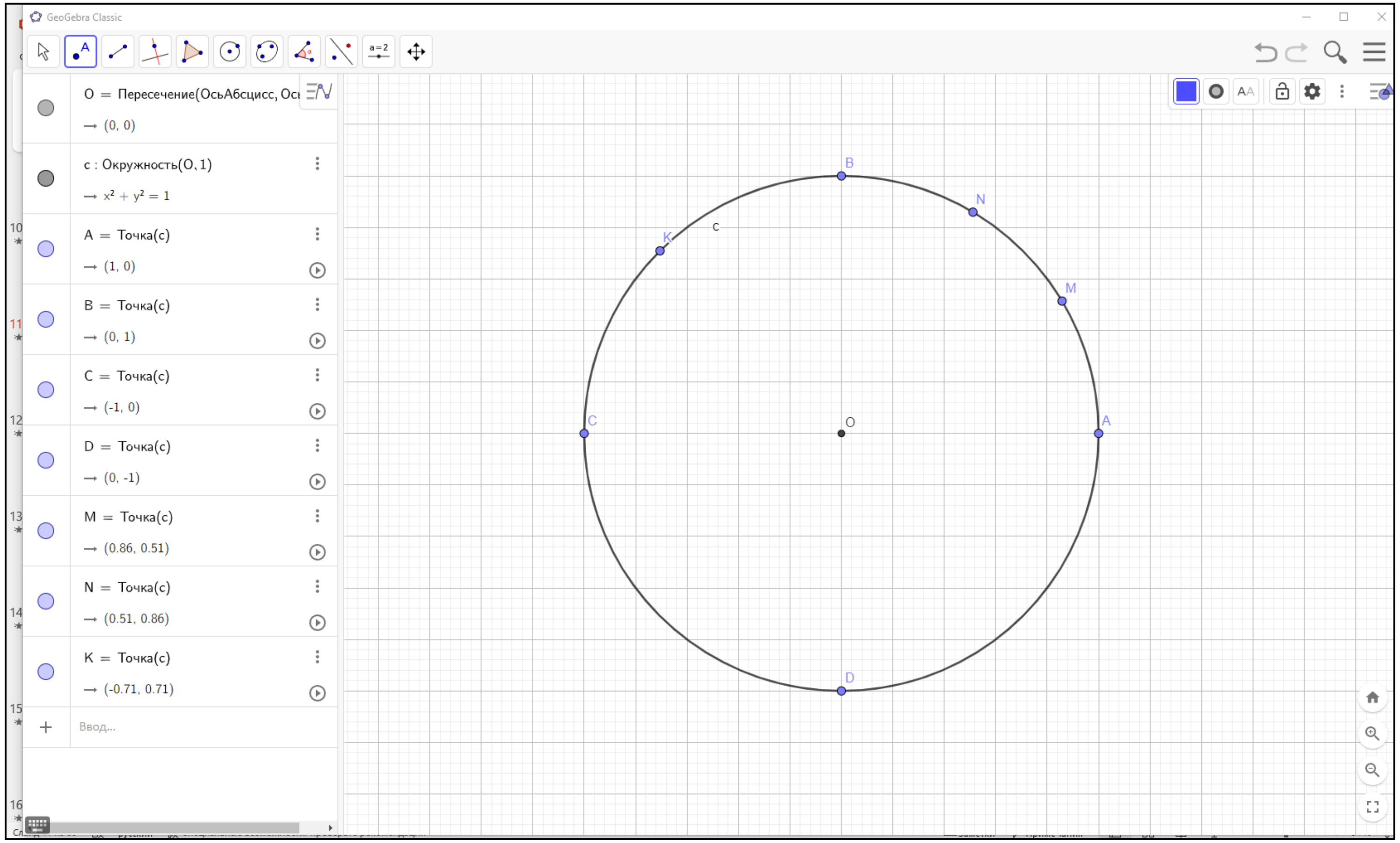
4. От «хорошей» точки к числу.

5. От дуги к её аналитической записи.

1. Длина дуги единичной окружности

1.1. а) Первая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от A, а вторая — точкой K пополам. Найдите, чему равны длины дуг AM, AN, AK, BK, MK, CN.

б) Вторая четверть числовой окружности разделена на три равные части точками M и N, считая от B, а третья — на две равные части точкой K. Вычислите длину дуги: BM, AN, MK, BK, MD, CN.



ПРОСВЕЩЕНИЕ
издательство
СОЮЗ

2. От «хорошего» числа к точке

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Укажите на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу.

1.3. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$.

1.4. а) $-\frac{29\pi}{6}$; б) $-\frac{27\pi}{4}$; в) $\frac{26\pi}{3}$; г) $\frac{31\pi}{6}$.

1.5. а) $\frac{4\pi}{9}$; в) $-\frac{7\pi}{12}$; д) $\frac{22\pi}{7}$;

б) $-\frac{5\pi}{12}$; г) $\frac{4\pi}{7}$; е) $\frac{29\pi}{9}$.

Выясните, какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая данному числу.

1.11. а) $\frac{27\pi}{4}$; б) $\frac{31\pi}{3}$; в) $-\frac{37\pi}{6}$; г) $-\frac{33\pi}{4}$.

2. От «хорошего» числа к точке

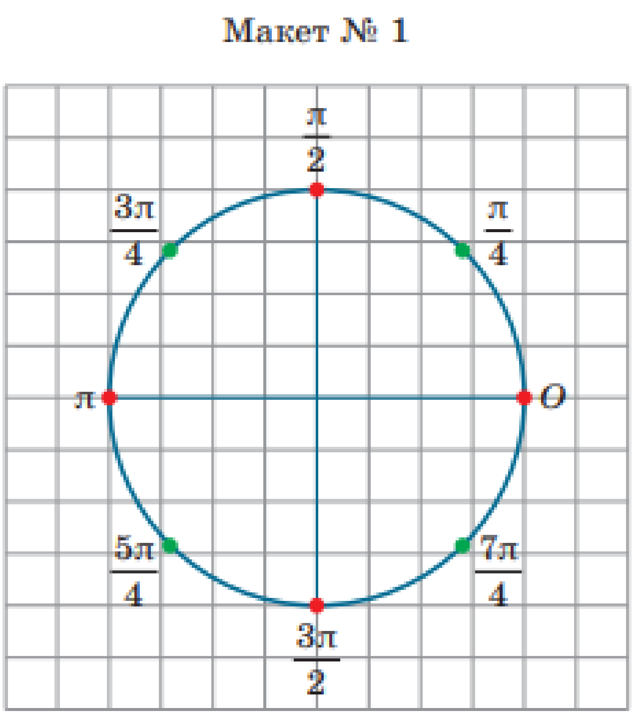


Рис. 5

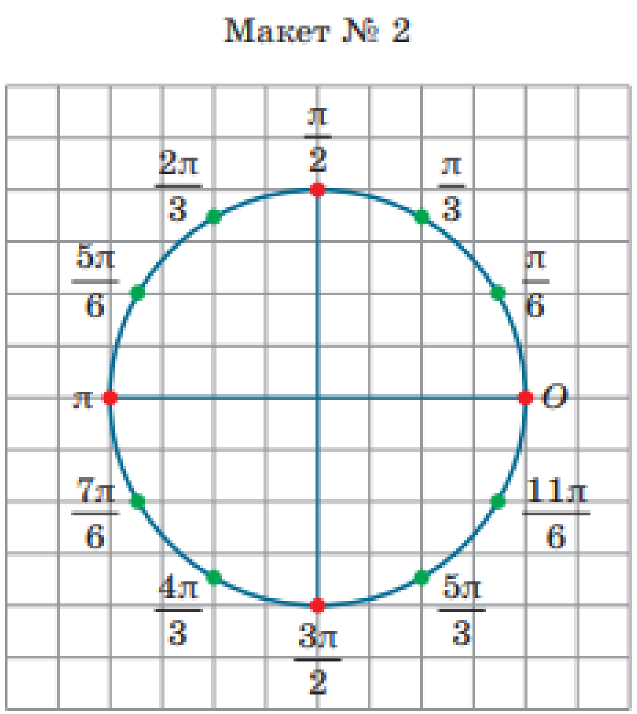
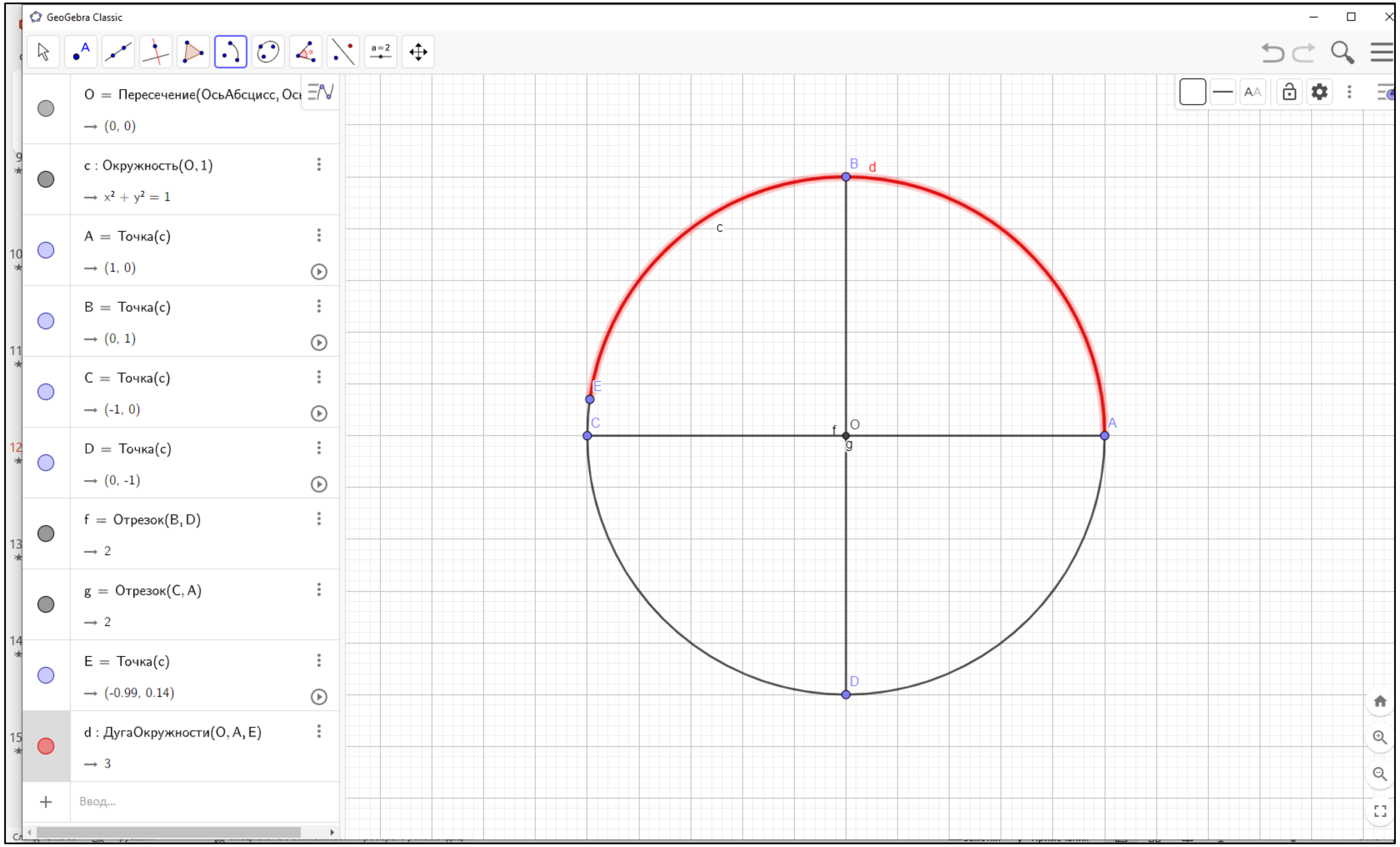


Рис. 6

3. От «плохого» числа к точке

Укажите на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу.

ИКТ **1.6.** а) 3; б) 2; в) 5,5;

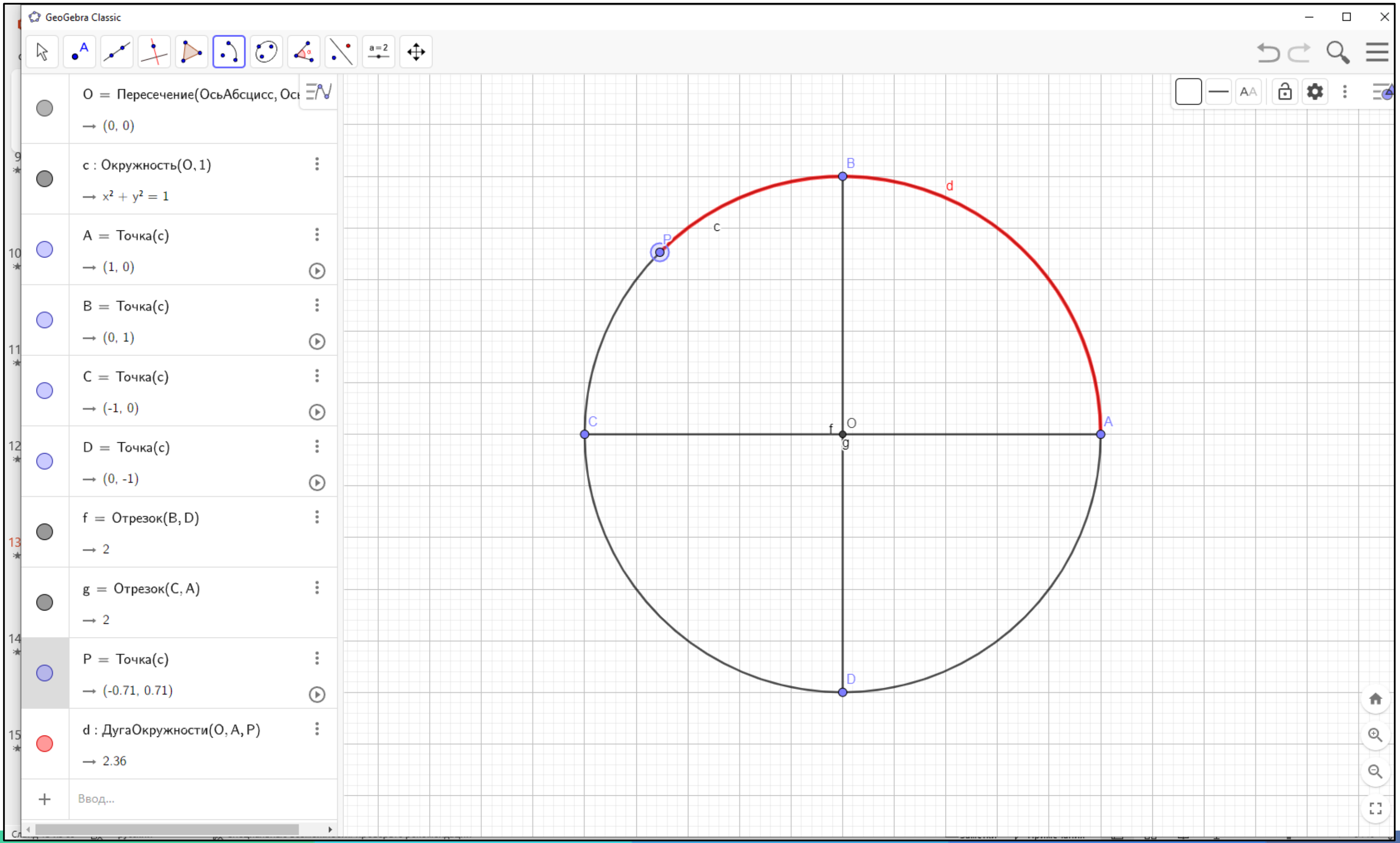


4. От «хорошей» точки к числу

Запишите формулой все числа, которым на числовой окружности соответствует точка P.

1.8. а) $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$;

Ответ. $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

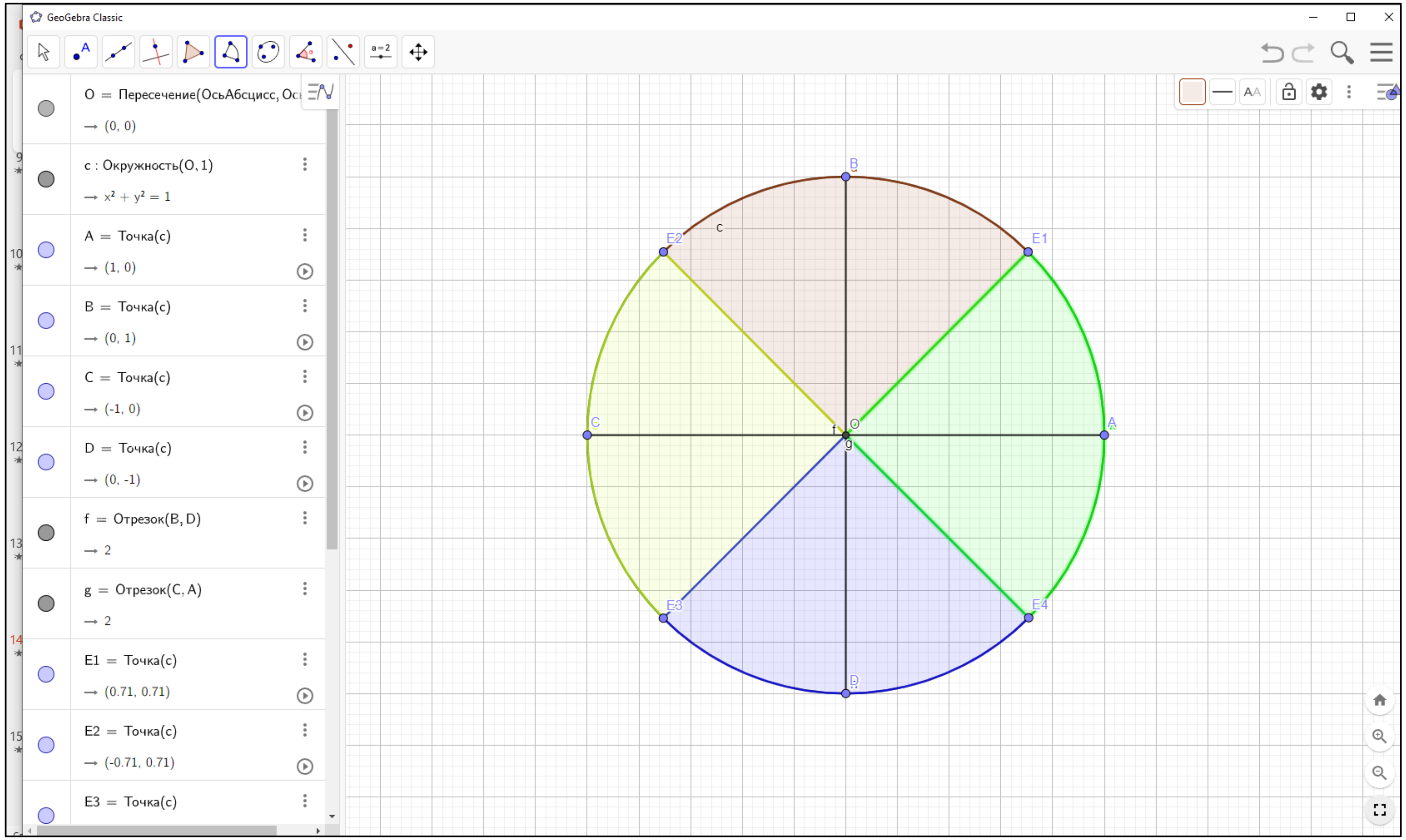


Три кита тригонометрии

1.10. Запишите одной формулой все числа, которым на числовой окружности соответствуют данные точки:

в) $E_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ и $E_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$;

Ответ. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$



5. От дуги к её аналитической записи

но, замкнутые или открытые дуги. *Замкнутая дуга* — это значит, что её концы включаются в рассмотрение; *открытая дуга* — это значит, что её концы не включаются в рассмотрение.

Как для отрезков и интервалов, начальную и конечную точки дуги будем изображать тёмными или светлыми кружочками; направление движения по дуге — *против часовой стрелки* (положительное направление обхода окружности).

Дуги числовой окружности можно задавать аналитически с помощью двойных неравенств. Рассмотрим замкнутую дугу KM,

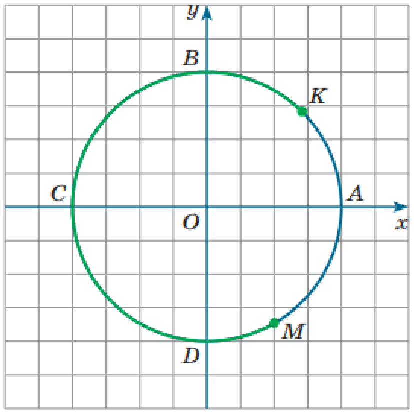


Рис. 17

где точка K соответствует числам вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, а точка M — числам вида $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ (рис. 17). Точки дуги KM соответствуют числам t, для которых

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

А теперь составим аналитическую модель для дуги MK. Точка $A(0)$ находится внутри дуги MK, поэтому к началу дуги — к точке M — мы движемся от точки $A(0)$ *в отрицательном направлении.* Значит, главное имя точки M не $\frac{5\pi}{3}$, как было у дуги KM, а $-\frac{\pi}{3}$. Вывод: точки дуги MK соответствуют числам t, для которых

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Числовая окружность на координатной плоскости – система дидактических заданий

1. Координаты «хороших» точек:
M (t) = M (x; y).

2. Знаки координат «плохих» точек.

3. Переход от декартовых координат к криволинейным.

1. Координаты «хороших» точек: $M(t) = M(x; y)$

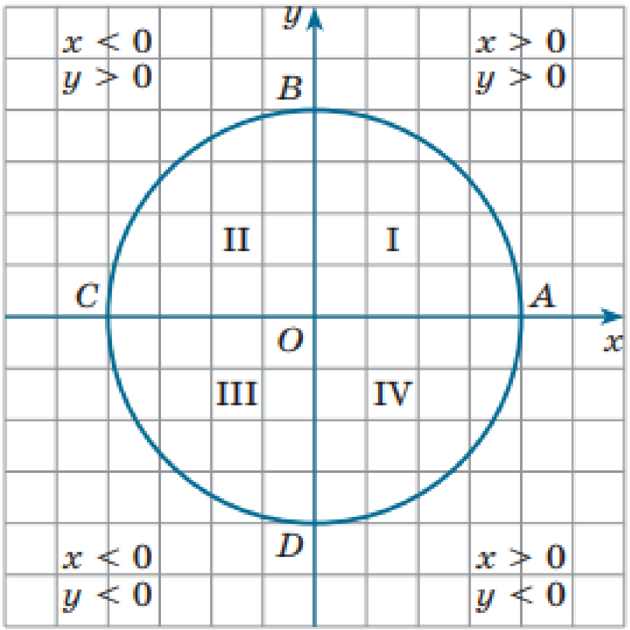


Рис. 10

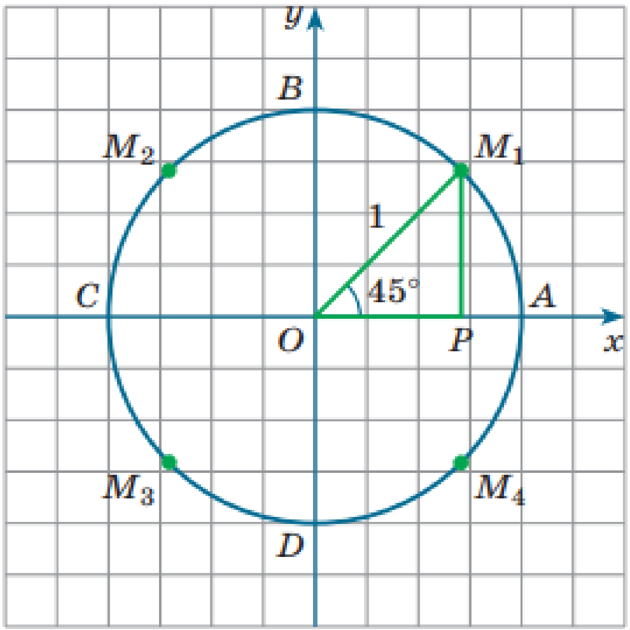


Рис. 11

1. Координаты «хороших» точек: $M(t) = M(x; y)$

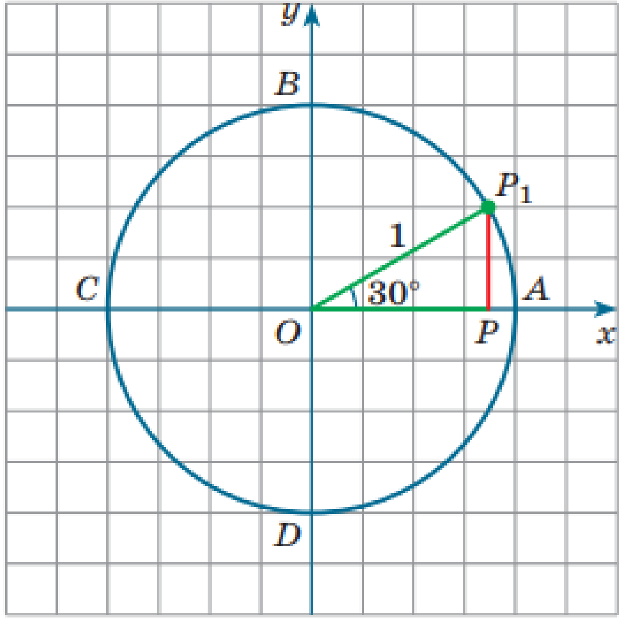


Рис. 12

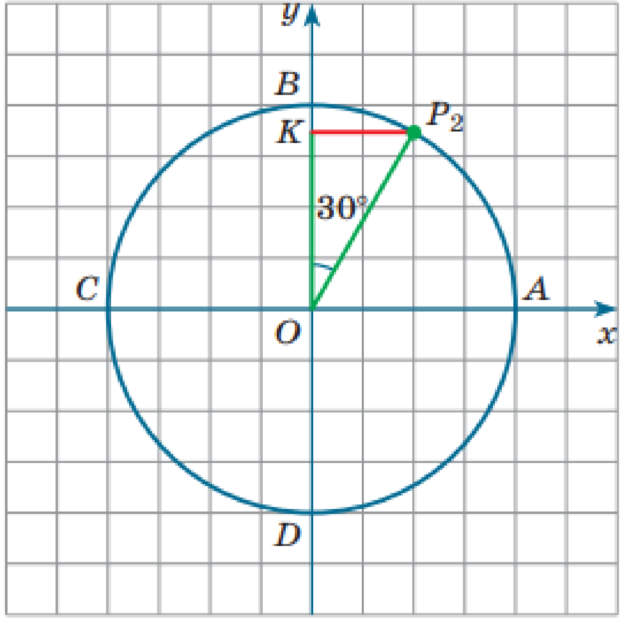


Рис. 13

2. Знаки координат «плохих» точек

Укажите знаки абсциссы и ординаты данной точки числовой окружности.

2.8. а) $\frac{3\pi}{7}$; б) $-\frac{2\pi}{9}$; в) $\frac{23\pi}{4}$; г) $-\frac{33\pi}{8}$.

2.9. а) 2; б) 3; в) −4; г) −6; д) 7; е) −8.

ИКТ **2.10.** а) 24; б) 32; в) −45; г) −51; д) 35; е) −86.

3. Переход от декартовых координат к криволинейным

2.4. Найдите наименьшее положительное число, которому на числовой окружности соответствует точка M с заданными координатами в декартовой системе координат:

а) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.5. Найдите наибольшее отрицательное число, которому на числовой окружности соответствует точка M с заданными координатами в декартовой системе координат:

а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.6. Найдите на числовой окружности точки с данной абсциссой и запишите, каким числам t они соответствуют:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x = -\frac{1}{2}$.

Обогащение математического языка

§ 4. Понятия косинуса и синуса числа

Определение. Если точка M числовой окружности на координатной плоскости xOy соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа t** и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа t** и обозначают $\sin t$.
Итак (рис. 28),

если $M(t) = M(x; y)$, то
$x = \cos t$, $y = \sin t$.

Из определения косинуса и синуса сразу получается целый ряд важных соотношений.

1) Поскольку для абсциссы и ординаты любой точки числовой окружности выполняются неравенства $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то для любого числа t:

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

2) Поскольку числам t, $t + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, соответствует одна и та же точка числовой окружности, то:

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos t,$$
$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t.$$

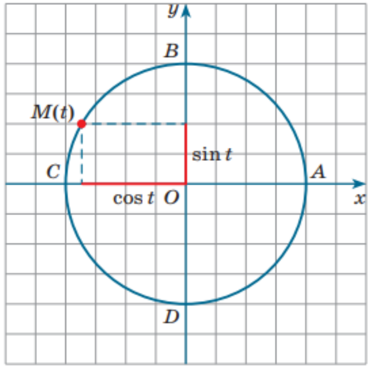


Рис. 28

3) Поскольку $x > 0$, $y > 0$ в первой четверти; $x < 0$, $y > 0$ во второй четверти; $x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти; $x > 0$, $y < 0$ в четвёртой четверти, то можно указать знаки косинуса и синуса по четвертям числовой окружности — они представлены на рисунке 29.

4) Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно оси абсцисс (рис. 30). У точек M и P одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У точек M и P равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты, а это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$. Итак, для любого числа t

$$\cos(-t) = \cos t,$$
$$\sin(-t) = -\sin t.$$

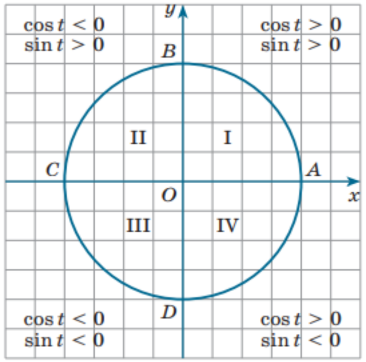


Рис. 29

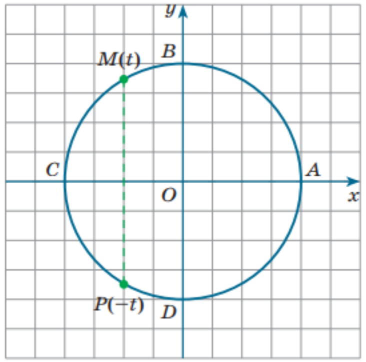


Рис. 30

5) В § 2 мы подробно обсудили, как вычислять координаты всех точек, отмеченных на макетах № 1 и № 2 (см. с. 10). Составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$.

Таблица 1

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 2

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

Обогащение математического языка

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

§ 6. Соотношения между тригонометрическими функциями

В § 4 мы узнали, что каждому действительному числу t по определённому правилу поставлены в соответствие числа $\cos t$ и $\sin t$; это две новые функции: *косинус и синус* числового аргумента. В § 5 мы узнали, что для любого *допустимого* значения t можно вычислить $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$. Значит, получаем ещё две новые функции: *тангенс и котангенс* числового аргумента. Эти четыре функции ($s = \sin t$, $s = \cos t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$) называют *тригонометрическими функциями числового аргумента*.

Установим простейшие соотношения между этими функциями. Первое из них — соотношение между косинусом и синусом — называют его *основным тригонометрическим тождеством*. Формула выглядит так:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1.} \qquad (1)$$

Докажем формулу (1). Пусть точка $M(x;\ y)$ числовой окружности соответствует числу t. Тогда $x = \cos t$, $y = \sin t$ и $x^2 + y^2 = 1$, так как числовая окружность — это окружность радиусом 1 и с центром в начале координат. Поэтому $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Нетрудно получить соотношение, связывающее $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$. Смотрите:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t},$$

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 1.$$

Эти рассуждения справедливы при условии, что $\cos t \neq 0$, $\sin t \neq 0$. Последние два соотношения означают, что нельзя брать такие значения аргумента t: $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$ и т. д. Обобщая, можно сказать так: «Соотношения $\cos t \neq 0$, $\sin t \neq 0$ выполняются при $t \neq \frac{\pi n}{2}$». Итак,

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \quad t \neq \frac{\pi n}{2};\ n \in \mathbf{Z}.} \qquad (2)$$

Пример 1 Упростить выражение:
а) $1 + \operatorname{tg}^2 t$; б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t$.

Решение.

а) $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$;

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$.

Мы получили ещё две важные формулы:

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \qquad (3)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad t \neq \pi n. \qquad (4)$$

Формулы (1)—(4) используются, например, в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения других тригонометрических функций того же аргумента.

Пример 2 Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислить $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся формулой $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Из неё следует, что

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Обогащение математического языка

Пример 3 Решить уравнение:
а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$.

Решение. а) Косинус — абсцисса точки t на числовой окружности, значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0 и записать, каким числам t они соответствуют.

Абсциссу 0 имеют точки B и D (см. рис. 30), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (точка B) и $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ (точка D). Обобщая, это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) Абсциссу 1 имеет точка A числовой окружности (см. рис. 30), она соответствует числам $0 + 2\pi n$, т. е. $2\pi n$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид $t = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

в) Абсциссу -1 имеет точка C числовой окружности (см. рис. 30), она соответствует числам $\pi + 2\pi n$.

Итак, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид $t = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 4 Решить уравнение:
а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$.

Решение. а) Синус — ордината точки t на числовой окружности, значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой 0 и записать, каким числам t они соответствуют.

Ординату 0 имеют точки A и C (см. рис. 30), они соответствуют числам $0 + 2\pi n$, т. е. $2\pi n$ (точка A) и $\pi + 2\pi n$ (точка C). Обобщая, это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πn.

Итак, решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид $t = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

б) Ординату 1 имеет точка B числовой окружности (см. рис. 30), она соответствует числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

в) Ординату -1 имеет точка D числовой окружности (см. рис. 30), она соответствует числам вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

$\cos x = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$\cos x = 1$ $\quad x = 2\pi k,\ k \in Z$

$\cos x = -1$ $\quad x = \pi(1 + 2k),\ k \in Z$

$\sin x = 0$ $\quad x = \pi k,\ k \in Z$

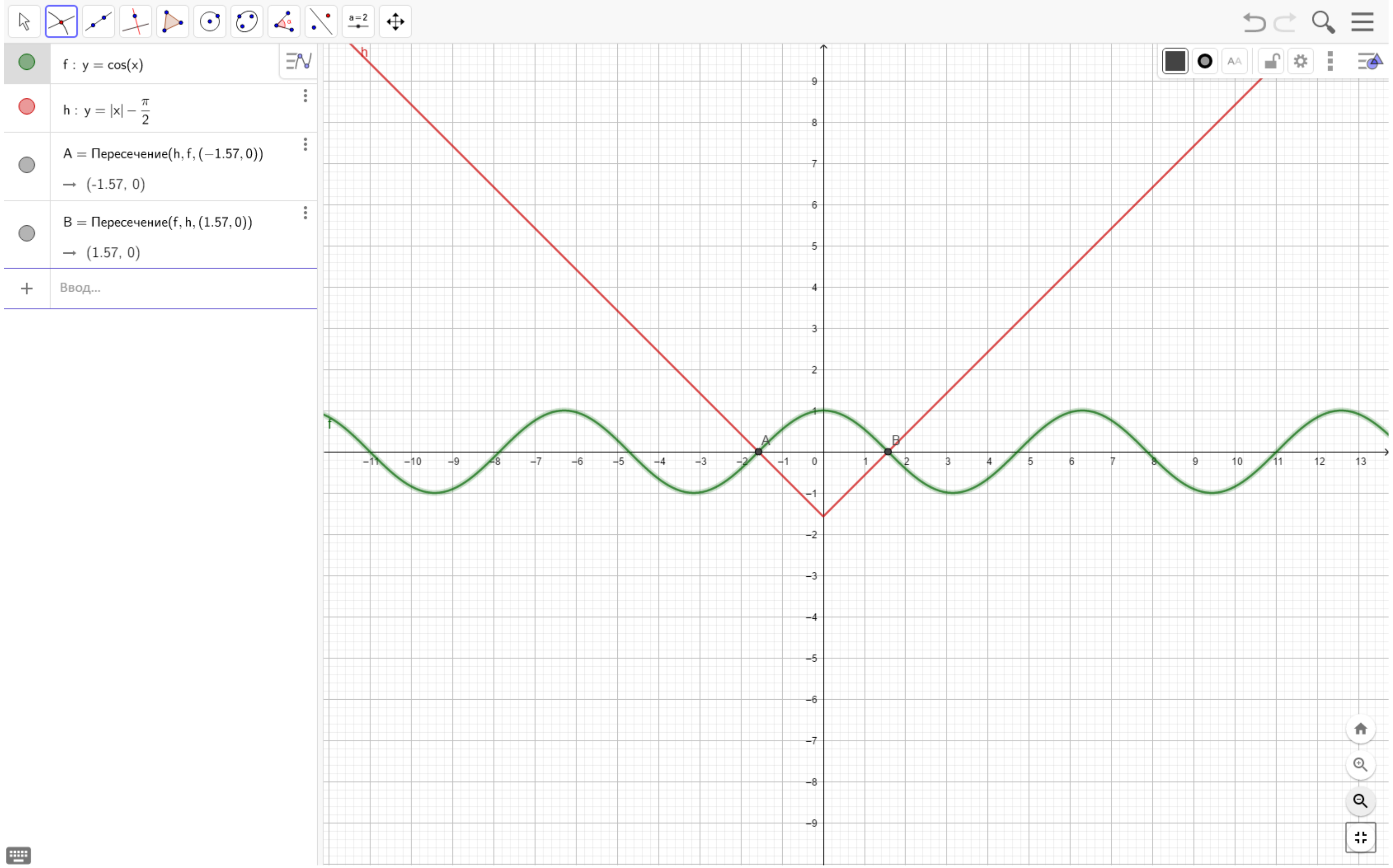
$\sin x = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$\sin x = -1$ $\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

Тригонометрические функции

ИКТ **9.9.** Решите уравнение.

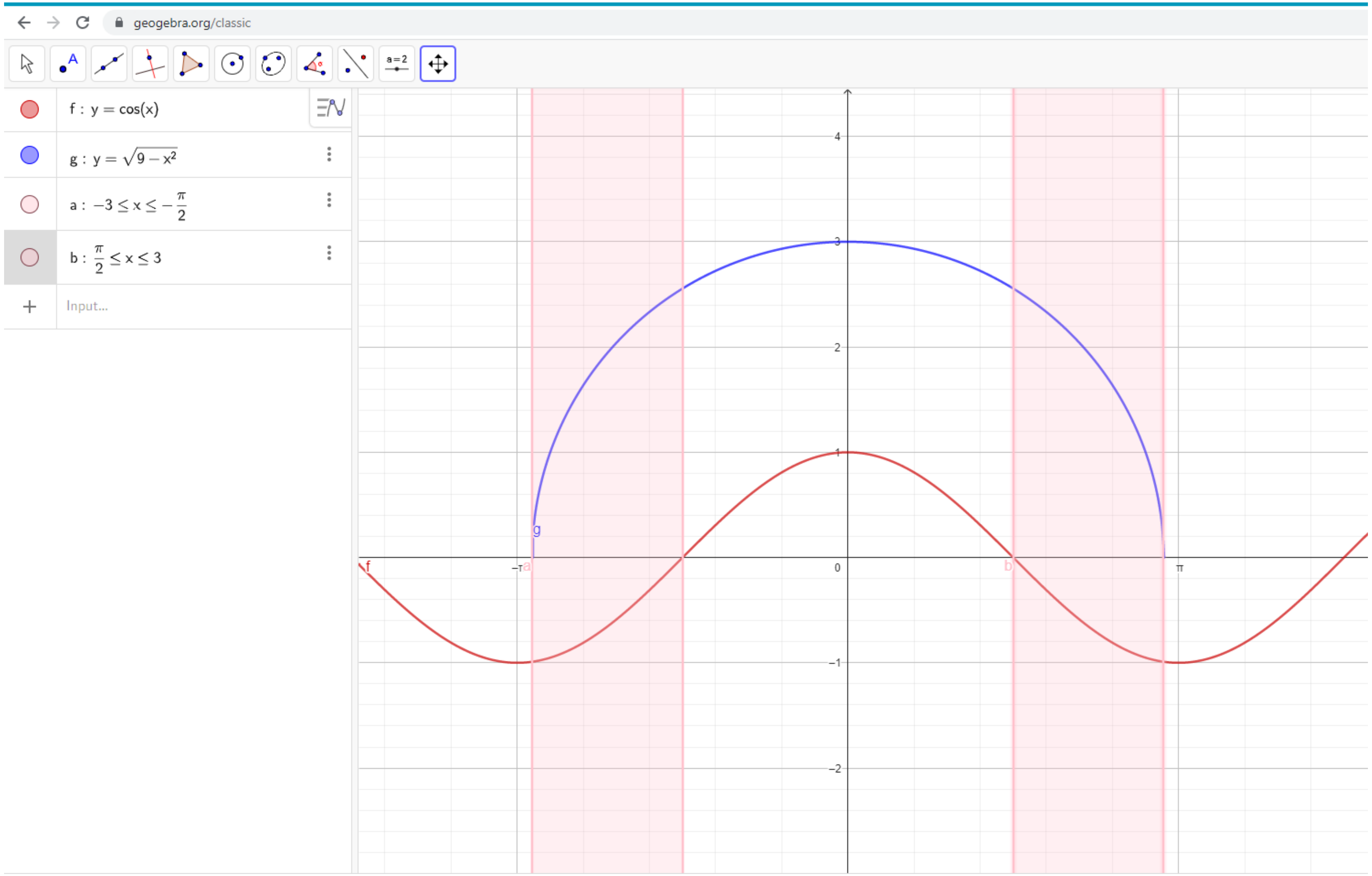
в) $\cos x = |x| - \frac{\pi}{2}$;



Тригонометрические функции

Решите неравенство.

9.17. а) $\cos x \cdot \sqrt{9 - x^2} \leqslant 0$;



Формулы тригонометрии

§ 25. Формулы приведения

В главе 1 мы познакомились с формулами, связывающими тригонометрические функции одного и того же аргумента. Вот эти формулы:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

В этой главе мы изучим ещё ряд формул, которые будем использовать для преобразования тригонометрических выражений и для решения тригонометрических уравнений.

Начнём с так называемых формул приведения. Если под знаком тригонометрической функции T содержится выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm x$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то, оказывается, выражение $T\left(\frac{\pi n}{2} \pm x\right)$ можно привести к более простому виду, при котором под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент x. Соответствующие формулы обычно называют ***формулами приведения***. Некоторые из этих формул мы получили в главе 1 (см. § 5, 10):

$$\sin(\pi + x) = -\sin x;$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x;$$
$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Формул приведения много, но есть удобный способ их запоминания. Он состоит из трёх положений.

1. Если под знаком заданной тригонометрической функции содержится выражение $\pi + x$, $\pi - x$, $2\pi + x$ или $2\pi - x$, то наименование тригонометрической функции от аргумента x будет таким же, как у заданной функции.

2. Если под знаком заданной тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{3\pi}{2} + x$, $\frac{3\pi}{2} - x$, то наименование тригонометрической функции от аргумента x следует изменить на родственное (синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс).

3. Перед полученной функцией от аргумента x следует поставить тот знак, который <u>имела бы преобразуемая функция</u> при условии, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Применим, например, это правило к выражению $\sin(\pi + x)$. Наименование функции сохраняется, т. е. записываем $\sin x$. Далее, если предположить, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + x$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(\pi + x) = -\sin x$, как и записано выше на с. 185.

Ещё пример. Применим сформулированное *мнемоническое*[1] *правило* для преобразования выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. Наименование функции изменяется, т. е. записываем $\cos x$. Далее, если предположить, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{3\pi}{2} + x$ — аргумент из четвёртой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, как и доказано на с. 186.

Сформулированное мнемоническое правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т. е. когда под знаком тригонометрической функции содержится выражение $90° + \alpha$, $90° - \alpha$, $180° + \alpha$ и т. д. Преобразуем, например, $\sin(360° - \alpha)$. Наименование функции следует сохранить ($360° = 2\pi$): пишем $\sin\alpha$. Далее, если считать, что $0 < \alpha < 90°$, получим, что $360° - \alpha$ — аргумент из четвёртой четверти, в которой преобразуемая функция синус имеет знак «минус». Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Получаем: $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

[1] От греч. *mnemonikon* — искусство запоминания.

Формулы тригонометрии

Приложение к § 26

Доказательство теоремы сложения

Поскольку в доказательстве используется модель «числовая окружность на координатной плоскости xOy», нам будет удобнее в формулах вместо x, y писать α, β.

Докажем формулу «косинус разности»:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Ради наглядности, ограничимся случаем, когда

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Отметим на числовой окружности, расположенной в координатной плоскости, точки $A(\alpha)$ и $B(\beta)$. Декартовы координаты этих точек таковы (рис. 129):

$$A(\alpha) = A(\cos\alpha, \sin\alpha),$$
$$B(\beta) = B(\cos\beta, \sin\beta).$$

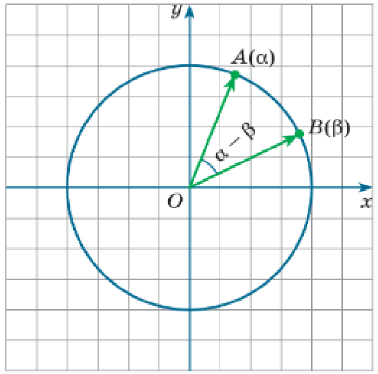


Рис. 129

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. По определению скалярного произведения векторов (скалярное произведение двух векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними) имеем: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\angle AOB$. Так как радиус числовой окружности равен 1, то $|\overrightarrow{OA}| = 1$ и $|\overrightarrow{OB}| = 1$. Центральный угол AOB равен $(\alpha - \beta)$. Значит,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(\alpha - \beta). \qquad (1)$$

С другой стороны, так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют начало в точке (0; 0), то их координаты совпадают с координатами точек A и B, т. е. имеем: $\overrightarrow{OA}$ $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $\overrightarrow{OB}$ $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тогда по свойству скалярного произведения векторов (скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат) выполняется равенство:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Таким образом, из равенств (1) и (2) получаем формулу «косинус разности»:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Для вывода формулы «косинус суммы» воспользуемся свойствами нечётности синуса и чётности косинуса: $\sin(-t) = -\sin t$; $\cos(-t) = \cos t$.

Имеем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Для вывода формулы «синус суммы» воспользуемся формулами приведения: $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ и уже доказанной формулой косинуса разности двух аргументов.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Итак,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Осталось получить формулу «синус разности», при этом будем использовать уже доказанную формулу «синус суммы»:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$$
$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$
$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y.$$

Формулы тригонометрии

В предыдущем параграфе мы говорили о том, как синус или косинус суммы или разности аргументов выразить через синусы и косинусы аргументов. Теперь выясним, как обстоит дело в аналогичном случае для тангенса. Вот как выглядят формулы тангенса суммы (разности) аргументов:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y};$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Обе формулы верны при допустимых значениях аргументов, т. е. при условии, что $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$ (для первой формулы), $x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$ (для второй формулы).

Докажем формулу тангенса суммы. Имеем:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}.$$

Разделим в полученной дроби числитель и знаменатель почленно на $\cos x\cos y$ (это возможно, поскольку $\cos x\cos y\neq 0$ при допустимых значениях x и y):

$$\frac{\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Итак, $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$.

Аналогично выводится формула «тангенс разности».

Рассмотрим выражение $\sin 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x+x$. Применим к выражению $\sin(x+x)$ формулу синуса суммы:

$$\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x.$$

Итак,

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Рассмотрим выражение $\cos 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x+x$. Применим к выражению $\cos(x+x)$ формулу косинуса суммы:

$$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

Итак,

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg}2x$, представив при этом $2x$ в виде $x+x$. Применим к выражению $\operatorname{tg}(x+x)$ формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(x+x)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}x}=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

Формулы тригонометрии

§ 29. Формулы понижения степени

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Таким образом, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Значит,

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.}$$

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Таким образом, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, значит,

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.}$$

Для удобства использования полученных формул будем называть их *формулами понижения степени*. Почему так? Потому что в левой части обеих формул тригонометрическая функция представлена во второй степени, а в правой — в первой степени. Но вам может встретиться и другой вариант названия этих формул — *формулы половинного аргумента*. Почему так? Потому что аргумент у тригонометрической функции в левой части обеих формул равен половине аргумента тригонометрической функции в правой части.

Применяя указанные две формулы, будьте внимательны: степень понижается, зато аргумент удваивается.

ПРОСВЕЩЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО СОЮЗ

Формулы тригонометрии

ЛАБОРАТОРИЯ А. Г. Мордковича

Вы знаете, что одним из основных методов решения тригонометрических уравнений является метод разложения на множители. В этом параграфе речь пойдёт о четырёх формулах, особенно полезных при решении тригонометрических уравнений, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители. Замечательно, что эти новые четыре формулы могут быть получены из уже известных формул (§ 26), которые мы запишем, поменяв наименования переменных:

$$\cos(z - t) = \cos z \cos t + \sin z \sin t \qquad (1)$$
$$\cos(z + t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t \qquad (2)$$
$$\sin(z - t) = \sin z \cos t - \cos z \sin t \qquad (3)$$
$$\sin(z + t) = \sin z \cos t + \cos z \sin t \qquad (4)$$

Теорема 1 («сумма синусов»). Сумма синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих аргументов на косинус их полуразности.

Доказательство. Почленно сложим равенства (4) и (3):

$$\sin(z + t) + \sin(z - t) =$$
$$= (\sin z \cos t + \cos z \sin t) + (\sin z \cos t - \cos z \sin t) = 2 \sin z \cos t.$$

Итак, $\sin(z + t) + \sin(z - t) = 2 \sin z \cos t$.

Обозначим $x = z + t$, $y = z - t$. Тогда $x + y = 2z$, $x - y = 2t$, $z = \frac{x+y}{2}$, $t = \frac{x-y}{2}$ и, значит,

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (5)$$

Теорема 2 («разность синусов»). Разность синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих аргументов на косинус их полусуммы.

Доказательство. Можно действовать, как и выше, вычитая равенство (3) из равенства (4). Но можно действовать и быстрее. В равенство (5) вместо y подставим $-y$. Учитывая нечётность синуса, получим $\sin x + \sin(-y) = 2\sin\frac{x+(-y)}{2}\cos\frac{x-(-y)}{2}$ или

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.} \qquad (6)$$

Теорема 3 («сумма косинусов»). Сумма косинусов двух аргументов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих аргументов.

Доказательство. Почленно сложим равенства (2) и (1):

$$\cos(z + t) + \cos(z - t) =$$
$$= (\cos z \cos t - \sin z \sin t) + (\cos z \cos t + \sin z \sin t) = 2 \cos z \cos t.$$

Итак, $\cos(z + t) + \cos(z - t) = 2 \cos z \cos t$.

Действуя далее, как в теореме 1, получаем:

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (7)$$

Проблема?

Решите уравнение $\cos^2 x + 2x^2 - 3\cos x\sqrt{x^2+1} + 2 = 0.$

Решение

$$\cos^2 x + 2x^2 + 2 = 3\cos x\sqrt{x^2+1}$$

$$\left(\cos^2 x + 2x^2 + 2\right)^2 = 9\cos^2 x\left(x^2+1\right)$$

Не получилось …?

Глава 6

Показательные и логарифмические функции

§ 46. Показательные функции

В предыдущей главе мы узнали, что такое a^x, где основание a — положительное число, а показатель степени — любое действительное число. Значит, можно говорить и о функции $y = a^x$, определённой на множестве всех действительных чисел. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют *показательной функцией*. Случай, когда $a = 1$, исключают, поскольку для любого показателя x выполняется равенство $1^x = 1$ и получается постоянная функция $y = 1$.

Показательные функции часто встречаются в реальных ситуациях. Например, формулы, связанные с показательной функцией, используются в качестве основных:

— в банковском деле при непрерывном начислении сложных процентов;

— в физике при исследовании законов радиоактивного распада вещества;

— в биологии при оценке роста численности популяции живых организмов;

— в IT-индустрии при планировании роста числа подписчиков успешной социальной сети.

Распространённость показательных функций связана с тем, что ими описывают процессы, в которых скорость изменения величины прямо пропорциональна значению величины.

Построим график показательной функции с основанием больше 1. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = 2^x$, составим таблицу значений для этой функции:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

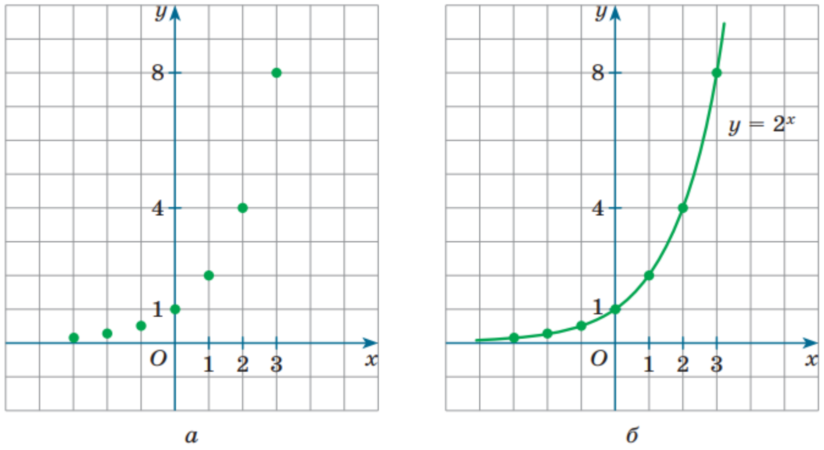


Рис. 170

Построим точки $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 4)$, $(3; 8)$, $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$, $\left(-3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 170, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 170, *б*).

Подобный вид имеет график любой показательной функции $y = a^x$, где $a > 1$.

Решите уравнение.

46.13. а) $3^x = 4 - x$; г) $5^x = 35 - 5x$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 3x + 31$; д) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = x + 8$;

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{x + 51}{9}$; е) $\left(\frac{11}{3}\right)^x = \frac{13 - 2x}{3}$.

ИКТ **46.14.** а) $2^x = \sqrt{x} + 1$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 = \sqrt{x}$;

б) $0{,}2^x = -\frac{5}{x}$; д) $3^x = \frac{3}{x}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$; е) $7^x = 9 - 2x$.

46.15. Решите неравенство:

а) $5^x \geqslant 125$; г) $6^x > 1296$;

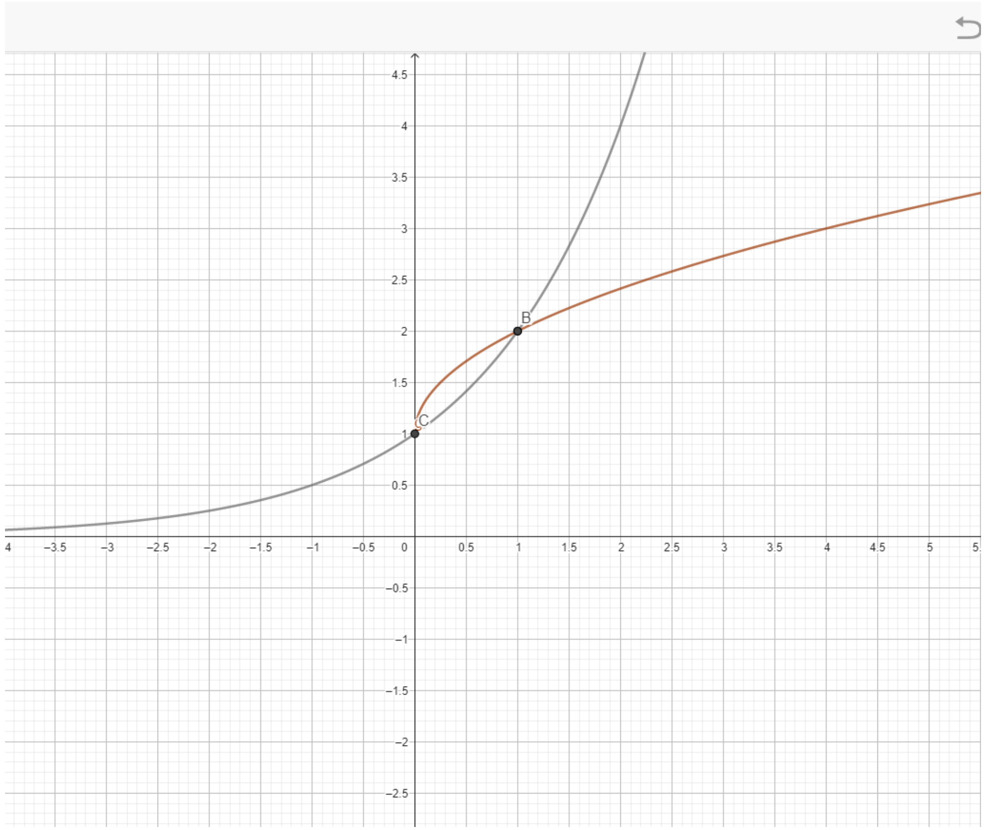
б) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \leqslant \frac{16}{625}$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \frac{32}{243}$;

в) $11^x < \frac{1}{121}$; е) $\left(\frac{1}{12}\right)^x > 144$.

ИКТ **46.16.** а) При каких значениях x график функции $y = 2^x$ лежит ниже графика функции $y = -1{,}5x - 1$?

б) При каких значениях x график функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ лежит ниже графика функции $y = 3x + 1$?

ИКТ **46.14.** а) $2^x = \sqrt{x} + 1$;



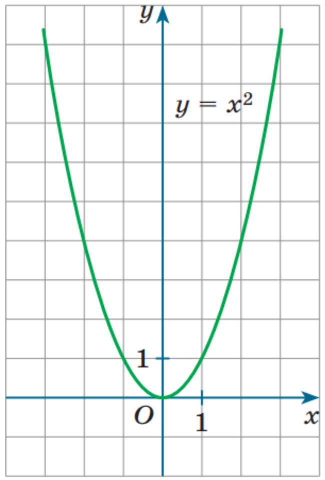


Рис. 177

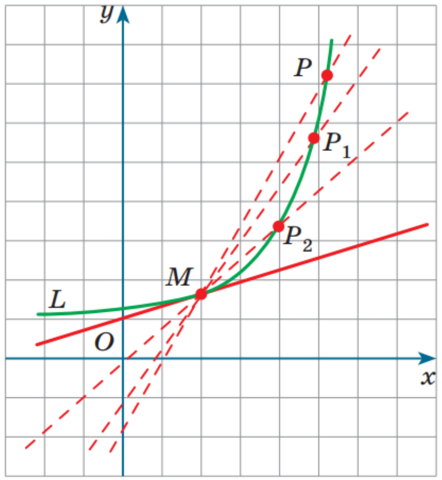


Рис. 178

вас спросят, какую из этих прямых можно назвать *касательной к параболе*, вы, опираясь на интуицию, скажете, что касательной является ось абсцисс. И это будет правильно. А как определить касательную к графику функции в некоторой точке в общем случае? Поговорим об этом.

Дана кривая L — график некоторой функции (рис. 178), на графике выбрана точка M. Нужно провести касательную к этому графику в точке M. Рассуждаем следующим образом. Возьмём ещё одну точку на этой кривой — точку P. Проведём секущую MP. Возьмём на кривой точку P_1 поближе к M, проведём секущую MP_1, затем точку P_2 ещё ближе к M и проведём секущую MP_2 и т. д. Как видите, секущая изменяет своё положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что в этом процессе секущая приближается к некоторому предельному положению. Эту прямую — предельное положение секущей — называют *касательной к кривой L в точке M*.

ИКТ Если, в частности, на параболе $y = x^2$ взять точку P, провести секущую OP, затем начать приближать точку P по параболе к точке O и проводить секущие, то вы увидите, что предельным положением этих секущих будет ось абсцисс, именно она и является касательной к параболе в точке O, что соответствует нашим интуитивным представлениям.

Проведём в точке $x = 0$ касательные к графикам трёх показательных функций $y = 2^x$, $y = 3^x$ и $y = 10^x$ (рис. 179, 180, 181). Видим, что чем больше основание, тем больше угол наклона касательной и оси

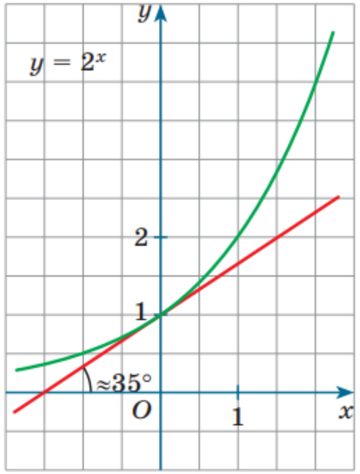


Рис. 179

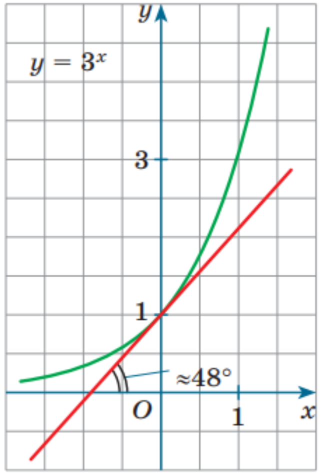


Рис. 180

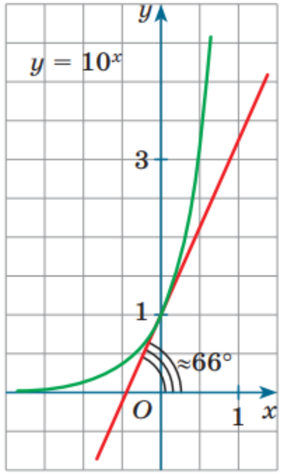


Рис. 181

абсцисс: касательная становится более «крутой». Можно убедиться в том, что касательная к графику функции $y = 2^x$ образует с осью абсцисс угол примерно в 35°, а для касательных к $y = 3^x$ и к $y = 10^x$ получатся углы наклона примерно в 48° и в 66°.

Итак, если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно и непрерывно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно и непрерывно увеличивается от 35° да 66°. Значит, существует такое основание e,

§ 47. Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$

что касательная к графику показательной функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ образует с осью абсцисс угол 45°. Это основание заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше, чем 45°, а для функции $y = 3^x$ он равен 48°, что уже немного больше, чем 45°. В курсе высшей математики доказано, что $e = 2{,}7182818284590...$, это иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). На практике обычно полагают, что $e \approx 2{,}7$.

График показательной функции $y = e^x$ изображён на рисунке 182. Он отличается от графиков показательных функций с другими основаниями тем, что касательная к графику в точке $x = 0$ параллельна биссектрисе $y = x$

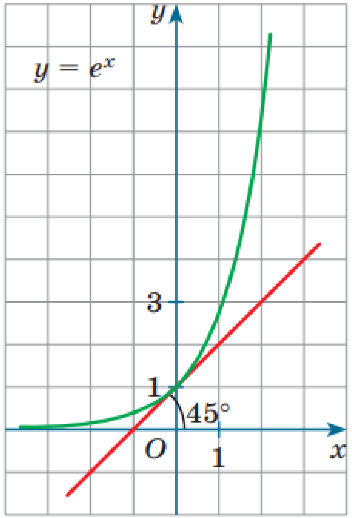


Рис. 182

первой и третьей координатных четвертей; угол наклона касательной к оси абсцисс равен 45°. Функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной*, а её график — *экспонентой*, хотя зачастую, для краткости, экспонентой называют и саму функцию $y = e^x$, и её график.

Функция $y = e^x$ чаще других показательных функций используется на практике. Приведём два стандартных, широко известных примера.

1) Предположим, что колония живых организмов находится в благоприятных условиях: пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы не ограничены, а хищников, питающихся организмами данной колонии, нет, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность. В таких условиях обычно считают, что скорость изменения численности колонии пропорциональна численности (чем больше организмов, тем выше скорость; k — коэффициент пропорциональности). Установлено, что число организмов колонии выражается формулой $y = y_0 e^{kt}$, где y_0 — численность колонии в момент времени $t = 0$, а $k > 0$ — некоторый коэффициент.

Примерно по такому же закону изменяется величина вклада в банковской структуре, этот закон называют *законом показательного роста*.

2) В комнату с температурой 20 °C внесли кипящий чайник. При определённых условиях можно считать, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Температура T тела в момент времени t выражается формулой $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$; здесь T_1 — температура окружающей среды, а T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$. В ситуации с чайником $T_1 = 20$ °C, а $T_0 = 100$ °C. Значит, $T = 20 + 80e^{-kt}$. С течением времени температура чайника будет приближаться к температуре окружающей среды. Процессы подобного рода называют *процессами выравнивания*.

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

§ 48. Показательные уравнения

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Пример 1 Решить уравнение:

а) $3^{2x^2} = 3^{5x-2}$; б) $\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{(0,25)^{x+1}} = 8^x$.

Решение. а) Согласно доказанной теореме уравнение $3^{2x^2} = 3^{5x-2}$ равносильно уравнению $2x^2 = 5x - 2$. Решив квадратное уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$, получим: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Это — корни заданного уравнения.

б) Поработаем по отдельности с левой и правой частями заданного уравнения:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{x+1} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^2\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^{9x-6} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{9x-6} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}.$$

Таким образом, можно переписать заданное уравнение в виде $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2}$. Значит, $2x + 2 = 3x - 2$, $x = 4$.

в) Обратите внимание: все три основания степеней, фигурирующие в уравнении, можно привести к одному основанию 2. Это наблюдение — ключ к решению. Имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{(0,25)^{x+1}} = 8^x; \quad \frac{2^{0,5}}{(2^{-2})^{x+1}} = (2^3)^x; \quad \frac{2^{0,5}}{2^{-2x-2}} = 2^{3x};$$

$$2^{0,5-(-2x-2)} = 2^{3x}; \quad 2^{2,5+2x} = 2^{3x}; \quad 2,5 + 2x = 3x; \quad x = 2,5.$$

Ответ: а) 2, $\frac{1}{2}$; б) 4; в) 2,5.

Завершая параграф, выделим три основных метода решения показательных уравнений.

1) *Метод уравнивания показателей*. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a — положительное число, отличное от 1, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Мы применили этот метод при решении примера 1.

2) *Метод введения новой переменной*. Мы применили этот метод при решении примеров 2 и 4.

3) *Функционально-графический метод*. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применили этот метод при решении примера 3.

Выполнение специальных заданий: Составление предписания по решению задач определённого типа

§ 48. Показательные уравнения

Решите уравнение

$$25^x + (x-31)\cdot 5^x = 25x - 150.$$

Решение:

Обозначим $p = 5^x,\ p > 0.$

Имеем $p^2 + (x-31)\cdot p - (25x-150) = 0.$

Получили квадратное относительно *p* уравнение с параметром *x*

$$D = (x-31)^2 - 4(25x-150) = (x+19)^2 \geq 0.$$

$$p_1 = \frac{31 - x + x + 19}{2} = 25, \qquad p_2 = \frac{31 - x - x - 19}{2} = 6 - x.$$

Сделаем обратную замену

$5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2.$

$5^x = 6 - x$

Рассмотрим функции $y = 5^x$ и $y = 6 - x$

$y = 5^x$ – возрастающая; $y = 6 - x$ – убывающая.

Следовательно, если решение есть, то оно единственное.

$x = 1.$

Ответ. 1, 2.

Урок по теме «Понятие логарифма»

Урок «открытия» нового знания	Деятельность на уроке
Проверка домашнего задания, актуализация знаний.	Повторяются: графический способ решения уравнений, построение графика функции $y = 3^x$.
Мотивация открытия нового знания. Побуждение к получению новой информации.	Постановка задачи: решите уравнения $3^x = 9$ и $3^x = 5$.
Получение новой информации	Работа с текстом учебника. Заполнение журнала.
Обработка новой информации	Анализ и формулировка проблемы. Выдвижение гипотезы: существует показатель степени $\log_3 5$, в которую необходимо возвести 3, чтобы получилось 5. Проверка гипотезы. Получение результата: понятие логарифма.
Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.	Решение заданий в группах. Закрепление нового понятия. Составление схемы определения понятия логарифма.
Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.	Выполнение самостоятельной работы. Работа с текстом учебника. Получение образовательного продукта: схемы доказательства иррациональности числа
Рефлексия. Осмысление изученного и сделанного	Подведение к выводу: раз мы узнали новое понятие, то следует более подробно изучить его свойства, взаимоотношение с уже известными понятиями.
Информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.	

§ 50. Понятие логарифма

Рассмотрим четыре показательных уравнения: $3^x = 9$, $3^x = \frac{1}{27}$, $3^x = \sqrt{3}$; $3^x = 5$. Первые три уравнения мы решим без труда, их корни — рациональные числа:

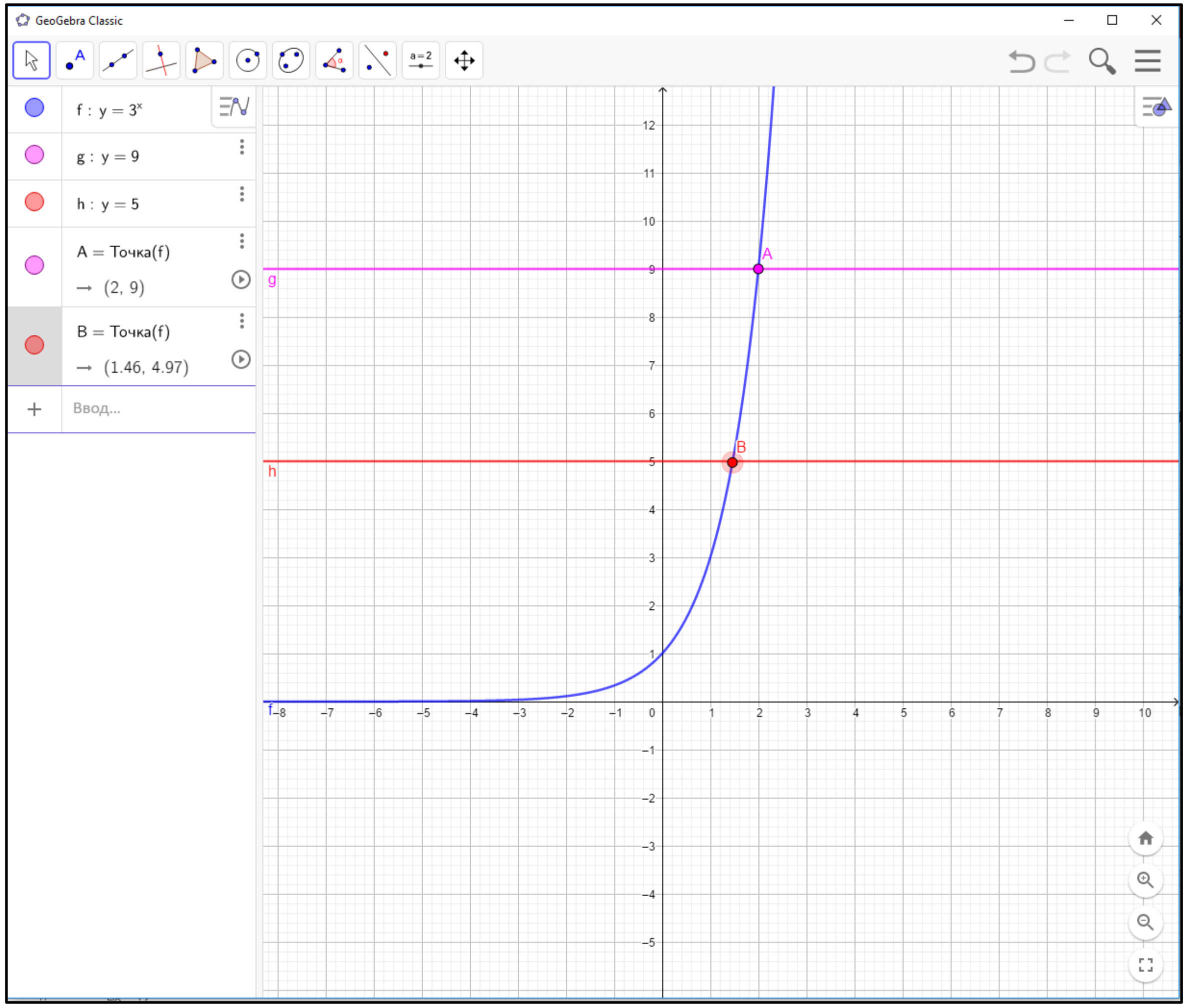
$$3^x = 9, \quad x = 2;$$

$$3^x = \frac{1}{27}, \quad x = -3;$$

$$3^x = \sqrt{3}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Таблица «Верю – проверю»

Верю	Утверждение	Проверю
Да	Уравнение $3^x = 9$ имеет корни.	$x = 2$
Нет	Уравнение $3^x = 5$ имеет корни.	?



§ 50. Понятие логарифма

Пример 3 Доказать, что $\log_3 5$ — иррациональное число.

Решение. Предположим, что $\log_3 5$ — рациональное число, т. е. $\log_3 5 = \frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа. Равенство $\log_3 5 = \frac{p}{q}$ означает, что $3^{\frac{p}{q}} = 5$. Далее имеем: $\left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q$, $3^p = 5^q$. Последнее равенство невозможно хотя бы потому, что число 5^q оканчивается цифрой 5, а никакая натуральная степень числа 3 цифрой 5 не оканчивается.

Получили противоречие, это значит, что сделанное предположение о том, что $\log_3 5$ — рациональное число, неверно. Вывод: $\log_3 5$ — иррациональное число.

Выполнение специальных заданий: Составление схемы доказательства

$$\log_3 5 = \frac{p}{q}$$

$$3^{\frac{p}{q}} = 5 \qquad НОД(3; 5) = 1$$

$$\left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q \qquad НОД(3^p; 5^q) = 1$$

$$3^p = 5^q$$

Противоречие

1. Пусть $\log_3 5$ – рациональное число, т.е. $\log_3 5 = \frac{p}{q}$;

2. $3^{\frac{p}{q}} = 5 \Leftrightarrow \left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q \Leftrightarrow 3^p = 5^q$;

3. Противоречие;

4. Результат $\log_3 5$ – иррациональные число.

§ 50. Понятие логарифма

С аналогичной «нештатной» ситуацией мы встретились в курсе алгебры 8-го класса, когда надо было найти положительный корень уравнений: $x^2 = 4$, $x^2 = 9$, $x^2 = 5$. Для первых двух уравнений всё просто: $x = 2$, $x = 3$. А чтобы записать корень третьего уравнения, пришлось вводить новый термин «квадратный корень» и новое обозначение $\sqrt{5}$. С уравнением $3^x = 5$ поступим так же: введём новый термин «логарифм» и новое обозначение $\log_3 5$ (читают: «Логарифм числа 5 по основанию три»). Итак, уравнение $3^x = 5$ мы решили: $x = \log_3 5$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$ (читают: «*Логарифм числа b по основанию a*»).

Выполнение специальных заданий:
Составление схемы определения

Логарифм числа b по основанию a:

1) $b > 0$ и

2) $a > 0$ и

3) $a \neq 1$ и

4) $a^{\log_a b} = b$

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

Найдите корень уравнения

54.4. а) $\log_{0,3}(x^2 + 8x - 13) = \log_{0,3}(x + 5)$;

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Выполнение специальных заданий:
Поиск ошибки в готовом решении

Решение 1:

$$x^2 + 8x - 13 = x + 5$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 2$$

Правильное решение?

Ответ: -9.

Решение 2:

$$x^2 + 8x - 13 = x + 5$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 2$$

Проверка:

$$x_1 = -9$$

$$\log_{0,3}\left((-9)^2 + 8\cdot(-9) - 13\right) = \log_{0,3}(-9 + 5)$$ – неверное равенство

$$x_2 = 2$$

$$\log_{0,3}\left(2^2 + 8\cdot 2 - 13\right) = \log_{0,3}(2 + 5)$$ – верное равенство

Ответ: 2.

Найдите корень уравнения

54.4. а) $\log_{0,3}(x^2 + 8x - 13) = \log_{0,3}(x + 5)$;

Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение 3:

$$\begin{cases} x^2+8x-13=x+5, \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x-18=0, \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=2 \end{array}\right. \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Решение 4:

Выполнение специальных заданий:
Поиск ошибки в готовом решении

$$\begin{cases} x^2+8x-13=x+5, \\ x^2+8x-13>0, \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x-18=0, \\ \left[\begin{array}{l} x<-4-\sqrt{29}, \\ x>-4+\sqrt{29}, \end{array}\right. \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

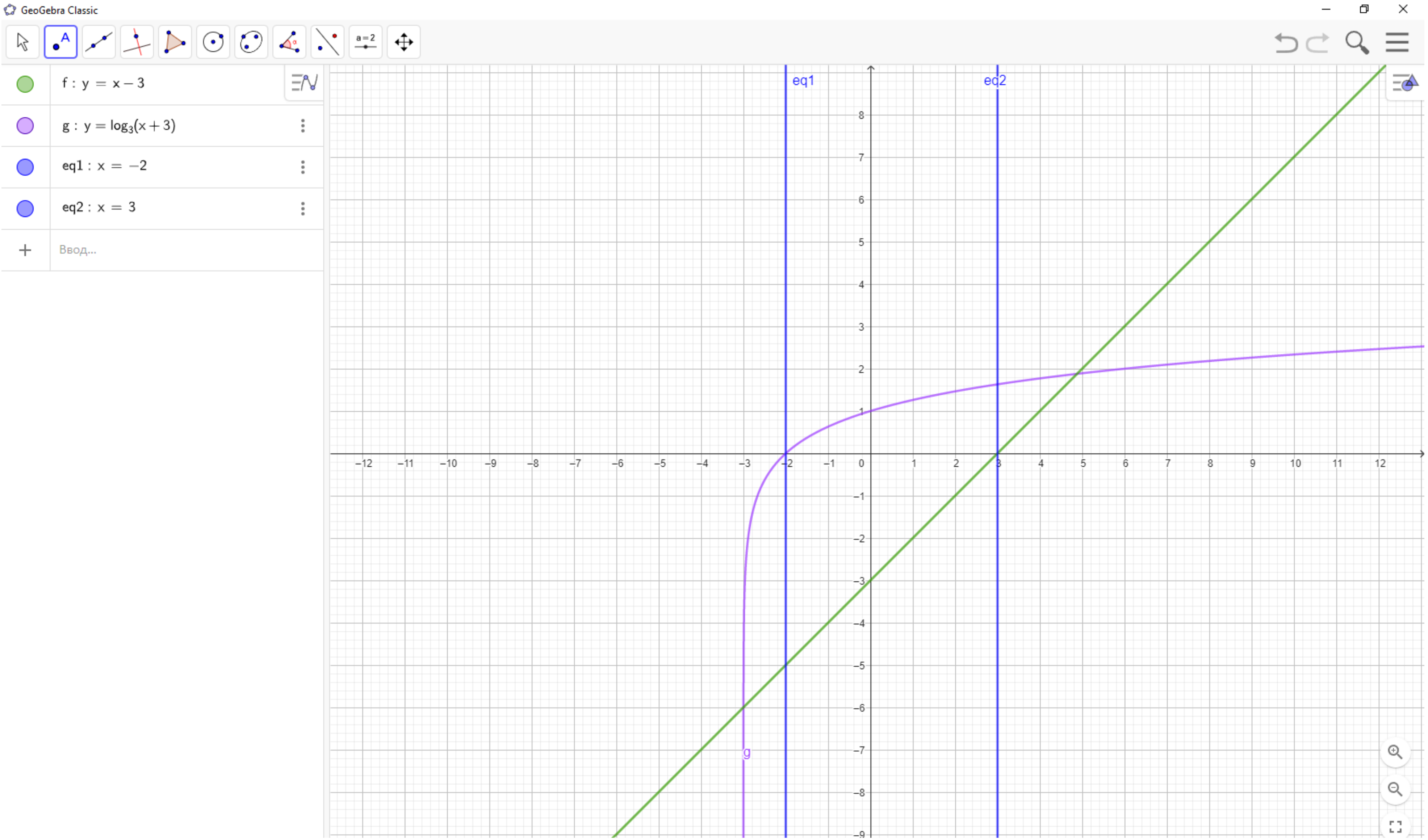
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-4-\sqrt{29}, \\ x>-4+\sqrt{29}, \end{array}\right. \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x>-4+\sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Правильное решение?

Решите неравенство.

37.33. а) $(x-3)\log_3(x+3) \geqslant 0$;

Метод интервалов



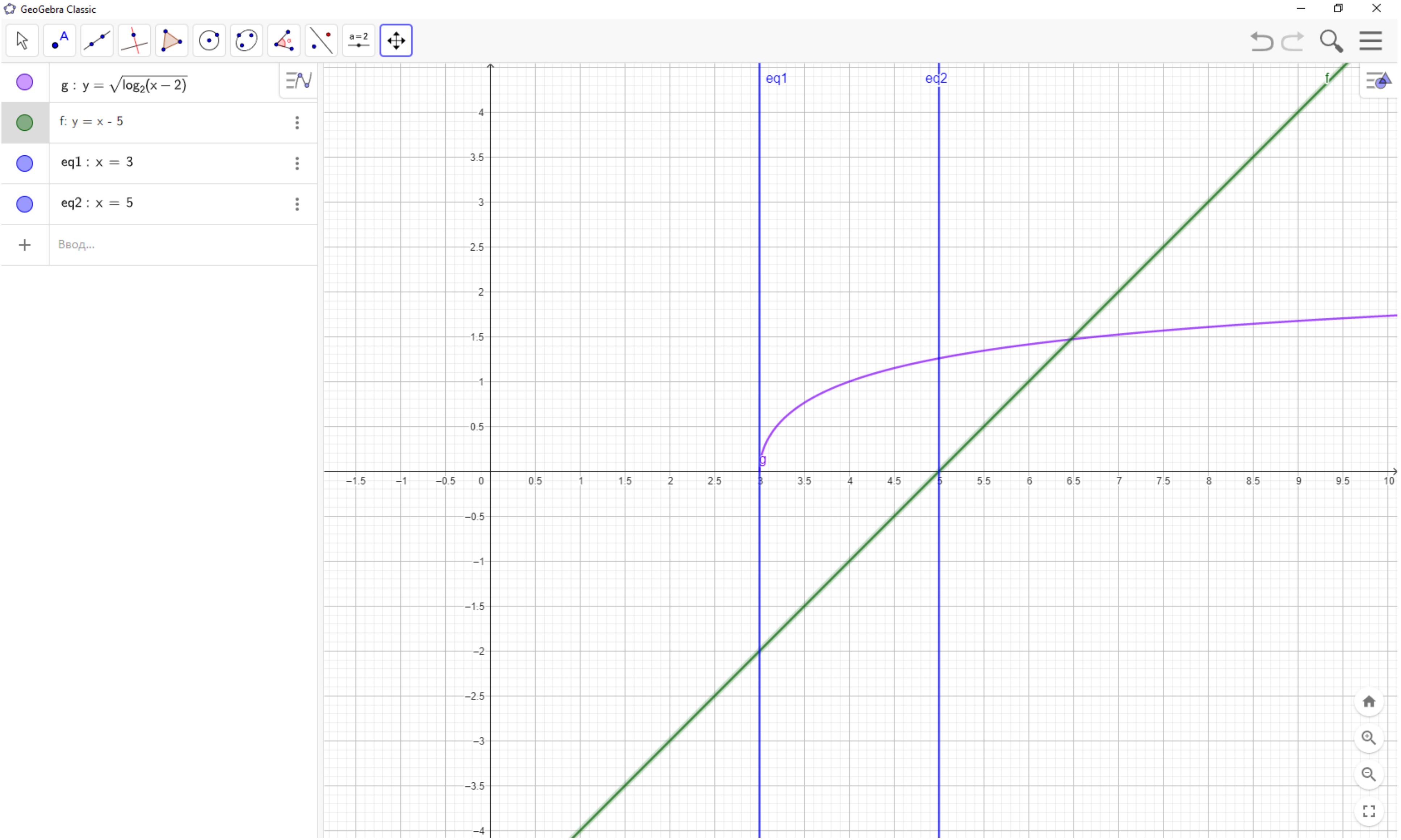
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

Решите неравенство.

в) $(x-5)\sqrt{\log_2(x-2)} \geqslant 0;$

Метод интервалов

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича



Приказ № 858 Министерства просвещения РФ от 21 сентября 2022 г. «Об утверждении федерального перечня учебников …»

ФГОС 2009

До 31 августа 2023 года

До 31 августа 2024 года

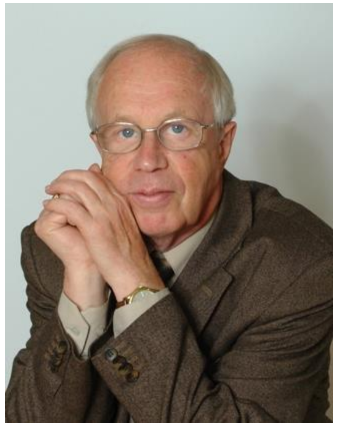
До 31 августа 2025 года

ФГОС 2021

С 1 января 2023 года

- Готовятся к экспертизе учебники для 10 и 11 классов углублённого уровня

Отличительные особенности УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»



Курс построен на основе приоритетности функционально-графической линии, математическое моделирование является идейным стержнем.

- Теория и практика соединены в одну книгу. Каждая часть соответствует примерно полугодию.
- Порядок тем соответствует ПРП, отражает психологические особенности обучающихся.
- Выстроена вероятностно-стохастическая линия в тесной взаимосвязи с основным содержанием.

- Каждая глава содержит разделы «Повторение», «Итак, в Главе…», «Вопросы», «Дополнительные задачи», «Из истории математики».
- Трёхуровневая система заданий отражает требования обновлённого ФГОС ООО, итоговой аттестации. Добавлены задачи практического содержания, высокого уровня сложности.

- Включён материал, рекомендованный к изучению с использованием IT-средств в соответствии с обновлённым ФГОС ООО.

Геометрия,7-9 классы.
В.А.Смирнов, И.М.Смирнова

Учебники следуют традициям отечественного геометрического образования. Строгость и чёткость изложения сочетаются с доступностью и наглядностью. Учебники имеют небольшой объём, позволяющий сосредоточить усилия учащихся на основных результатах обучения.

Большое внимание уделено интересу и мотивации учащихся к обучению геометрии. С этой целью в учебники помимо традиционного материала включены исторические сведения, материал научно-популярного и прикладного характера, задачи практической направленности.

Каждая глава начинается с изображения интересного архитектурного сооружения России, поскольку объекты градостроительства, сочетающие в себе фантазию, красоту и практичность, дают нам возможность увидеть и ощутить многообразие геометрических форм.

- Готовятся к экспертизе учебники для 10 и 11 классов, базового и углублённого уровня

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
СОЮЗ

Проект по внедрению учебного пособия по геометрии для 7-9 классов

Цель проекта:

повышение профессиональных компетенций учителей математики в области преподавания геометрии в школе.

В рамках проекта:

методическое сопровождение авторов: вебинары, очные семинары, встречи и консультации с авторами, мастер-классы, эксклюзивные методические материалы от автора.

Смирнов Владимир Алексеевич,

профессор, докт. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор УМК по геометрии для 7-11 классов, учебно-методических пособий для студентов высших учебных заведений

Смирнова Ирина Михайловна,

профессор, докт. пед. наук, профессор кафедры элементарной математики МПГУ, автор УМК по геометрии для 7-11 классов, учебно-методических пособий для студентов высших учебных заведений

Регистрация

Записи прошедших вебинаров

Вебинар 1: Начала геометрии.
Вебинар 2: Треугольники.
Вебинар 3: Геометрические места точек.
Вебинар 4. Сумма углов многоугольника.

Совместный проект с Центром психологического сопровождения образования «ТОЧКА ПСИ»

ТОЧКА ПСИ

МАРАФОН «УЧУСЬ МАТЕМАТИКЕ У АВТОРОВ УЧЕБНИКОВ»

Регистрация

Цель Марафона:

- повышение уровня прохождения промежуточной и итоговой аттестации обучающихся на основе формирования самоконтроля и рефлексии с использованием идей, разработанных авторами УМК «Лаборатория А.Г.Мордковича».

Задачи Марафона:

- создание условий для формирования самоконтроля и рефлексии у обучающихся основной и средней школы;
- повышение мотивации к совершенствованию математических знаний через авторские онлайн-уроки;
- содействие обмену опытом и повышению квалификации учителей математики, на основе использования пособий УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича».

Мордкович Александр Григорьевич,

профессор МГПУ, докт. пед. наук, канд. физ.-мат. наук, научный руководитель Международного семинара преподавателей математики педвузов (1987 г-н.в.); Лауреат Премии Президента РФ в области образования, заслуженный деятель науки РФ, Отличник народного образования, награждён Медалью К.Д.Ушинского.

Битянова Марина Ростиславовна,

канд., псих. наук, профессор МИОО, директор Центра психологического сопровождения образования «ТОЧКА ПСИ»

Мардахаева Елена Львовна,

канд. пед. наук, доцент, Лауреат Премии Грант Москвы в сфере образования, автор УМК «Лаборатория А.Г.Мордковича»

Записи прошедших вебинаров

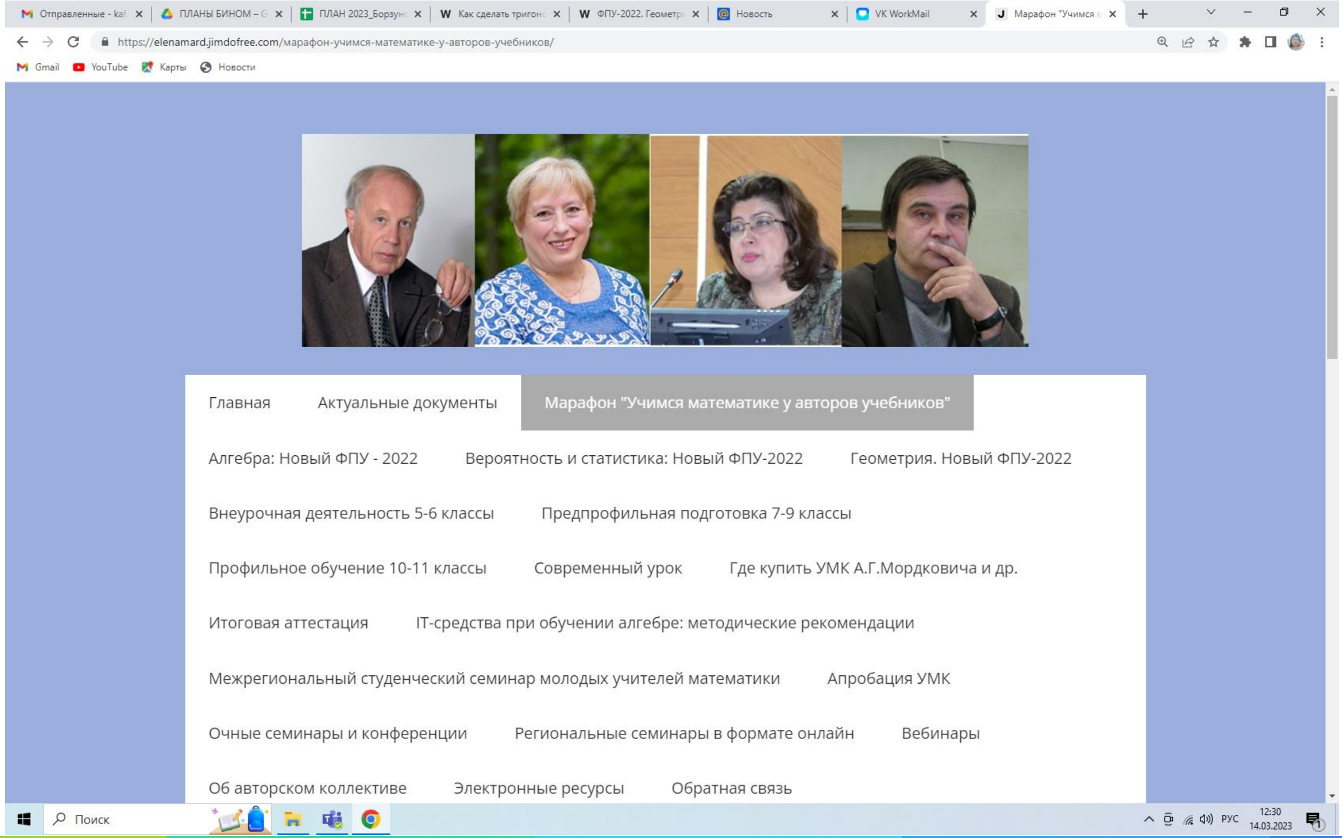
Адрес обратной связи:

kaf.matematika@gmail.com

Мы готовы к диалогу

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdfJ1EVQGYQDG41rgKY8MUAF6GVAPdtn3MSWU_DO79TXNyY0g/viewform

Методическое сопровождение учителей математики через авторский сайт https://elenamard.jimdofree.com



В СОЮЗЕ С МАТЕМАТИКОЙ

Преподавание математики в основной и средней школе.

https://t.me/souzmatematikov